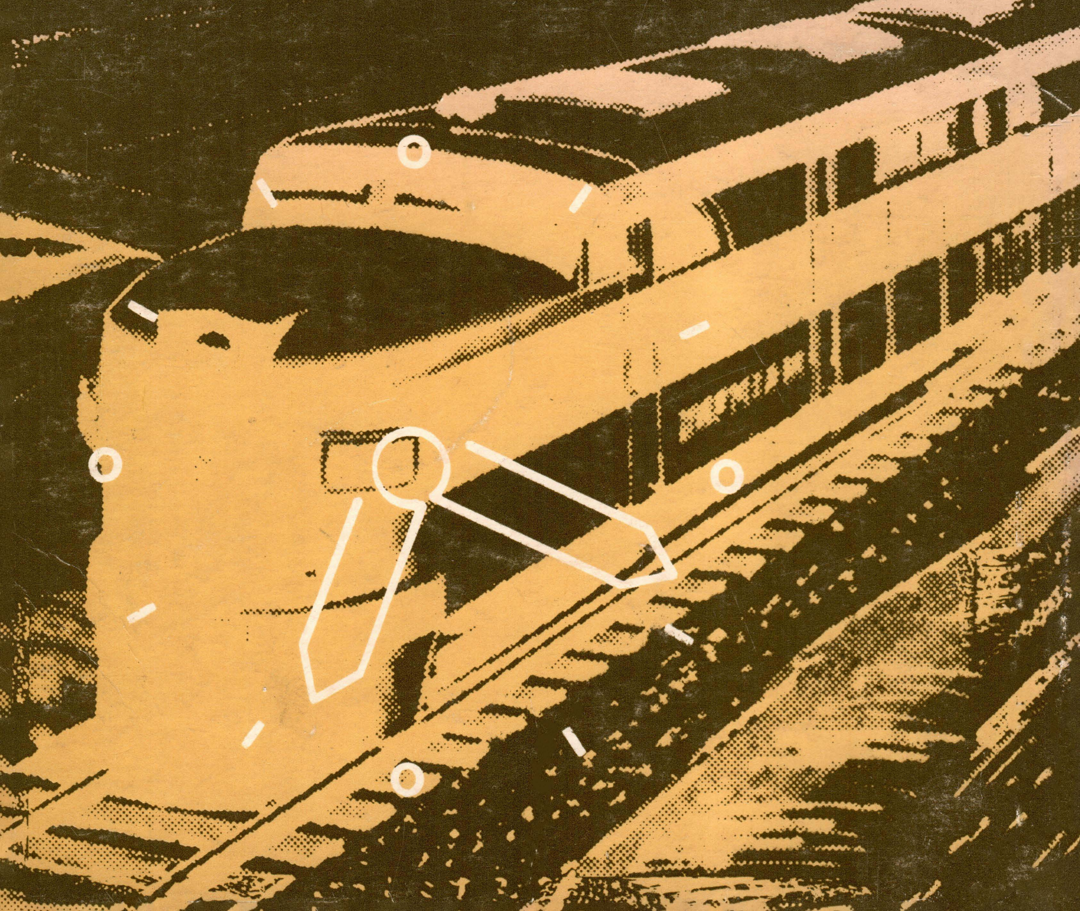
الکسی نیکلایه ویچ مالینین

نظریهٔ نسبیت در مسأله‌ها و تمرین‌ها

ترجمهٔ پرویز شهریاری



نظریهٔ نسبیت

در مسأله‌ها و تمرین‌ها

الکسی نیکلایه‌ویچ مالینین

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر نی

تهران ــ ۱۳۶۶

نشر نی: تهران، بلوار کشاورز، پاساژ سامان، شمارهٔ ۷ (تلفن ۶۵۹۵۸۵)

مالینین، الکسی نیکلایه‌ویچ

Алексей Николаевич Малинин

نظریهٔ نسبیت در مسأله‌ها و تمرین‌ها

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

مترجم: پرویز شهریاری

چاپ اول: ۱۳۶۶، تهران

تیراژ: ۳۳۰۰ نسخه

حروفچینی: مهدی

صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت

لیتوگرافی: موج

شاید به نظر برسد که «تجاوز» من به «حریم فیزیك»، آن هم «نظریهٔ نسبیت»، که‌خود تنها نوآموزی در آن زمینه هستم، درست نباشد. ولی حقیقت این است که من این کتاب را برای مطالعه تهیه کردم و وقتی که خیلی از دشواریهای ذهنی خود را، با مطالعهٔ آن، حل شده یافتم، دریغم آمد که خوانندهٔ فارسی زبان از آن بی‌بهره بماند. منتهی، برای اطمینان از ترجمه و، به‌خصوص، اصطلاح‌های فیزیك نسبیتی، زحمتی بزرگ برای دوست‌عزیزم آقای بهرام معلمی فراهم آوردم. ایشان با کمال بزرگواری تمامی ترجمه را با حوصله و دقت مطالعه کردند و، طبعاً، همه‌جا تسلیم نظرهای ایشان بوده‌ام.

مترجم

فهرست مطالب

فصل اول

مسأله‌ها

§ ۱. نظریهٔ نسبیت کلاسیك
پایه‌های فیزیك نیوتونی

۱. چارچوب مرجع لخت. اصل‌های نظریهٔ نسبیت کلاسیك

۱۰۱. چارچوب یعنی چه؟ درمکانیك کلاسیك، آن را چگونه برپا می‌کنند؟

۲۰۱. چارچوب مرجع لخت را چگونه تعریف می‌کنند؟

۳۰۱. ماهیت اصل نسبیت گالیله چیست؟

۴۰۱. این مفهوم‌ها را توضیح دهید: الف) فضای سه بعدی، فضای پیوسته، فضای همبند ساده، فضای اقلیدسی، فضای همگن وفضای همسان‌گرد (ایزوتروپیك)؛ب) زمان یك بعدی،زمان پیوسته،زمان یك سویه وزمان همگن.

۵۰۱. بر اساس قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها (برای چار چوب مرجع لخت)، درستی این حکم را ثابت کنید: سرعت بی‌نهایت زیاد، در چارچوب مرجع لخت، به همان صورتی است که در هر چارچوب مرجع لخت دیگری وجود دارد.

۶۰۱. پایهٔ عام فیزیك کلاسیك کدام است؟

۲. ویژگی‌های فضا وزمان در چارچوب مرجع مطلق. تبدیل‌های گالیله

۷۰۱. رویداد را تعریف کنید. آیا رویداد دارای ویژگی مطلقی است؟

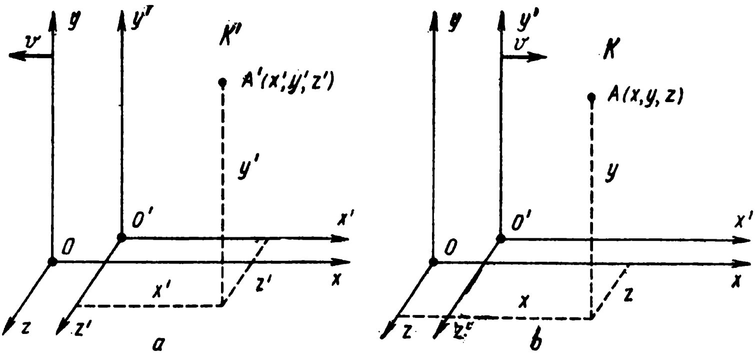
۰۸۰۱ آیا مفهوم فضای چهار بعدی (فضا ـ زمان)، در نظریهٔ نسبیت کلاسیک وجود دارد؟

۰۹۰۱ آیا هم‌زمانی‌دورویداددر نظریهٔ‌نسبیت کلاسیک،مطلق‌است یا نسبی؟

۱۰۰۱۰ در نظریهٔ نسبیت کلاسیک، چگونه یک‌زمان جهانی واحد، برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت برقرار می‌شود؟

۱۱۰۱۰ طول یک پاره خط متحرک را، چگونه تعریف می‌کنند؟ اگر l طول پاره خط باشد، ثابت کنید: $l = inv$.

۱۲۰۱۰ اگر دو چارچوب مرجع لخت K و K'، نسبت به‌یکدیگـر، با سرعت $\vec{v}$ حرکت کنند (شکل ۱)، قانون تبدیل (گالیله)، مختصات رویداد



شکل ۱

(x, y, z, t) را برای این دو چارچوب پیدا کنید.

۱۳۰۱۰ مفهوم ونقش تبدیل‌های گالیله در فیزیک کلاسیک چیست؟

۱۴۰۱۰ مطلق و نسبی‌بودن فضا و زمان را، در نظریهٔ نسبیت کلاسیک، از روی تبدیل‌های گالیله بیان‌کنید.

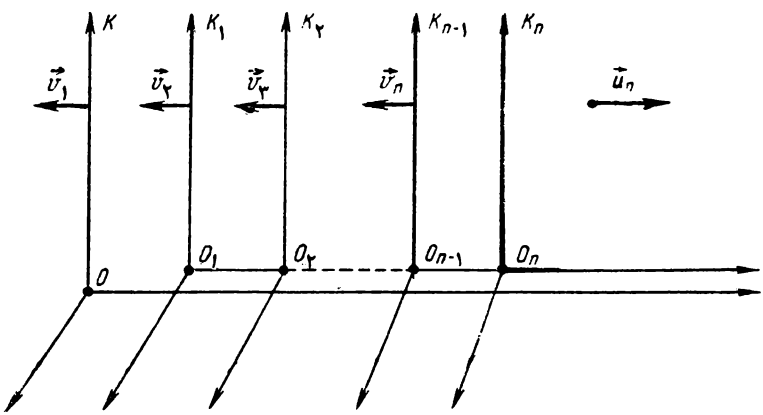
۱۵۰۱۰ براساس اصل علیت، باید «رویـداد معلول» بعد از «رویداد علت» بیایـد. ثابت‌کنید، تغییرناپذیربودن این اصل (که درهمهٔ چارچوب‌های مرجع لخت درست است)، از تبدیل‌های گالیله تأمین می‌شود.

۱۶۰۱۰ با استفاده از تبدیل‌های گالیله، کار ساعت متحرک را باساعت ساکن وطول پاره خط متحرک را با طول پاره خط ساکن، مقایسه‌کنید.

۳. سینماتیک (جنبش‌شناسی) کلاسیک
قانون‌های تبدیل سرعت و شتاب

۱۷۰۱. باروش تجربهٔ ذهنی و براساس تغییرناپذیربودن ویژگی‌های فضا و زمان، قانون کلاسیک تبدیل سرعت طولی را نتیجه بگیرید (سرعت طولی،عبارت است ازسرعت ذره به‌موازات $\vec{v}$، یعنی سرعت نسبی‌چارچوب‌های مرجع لخت K و K').

۱۸۰۱. ذره‌ای در چارچوب مرجع لخت K'، با سرعت $\vec{u'}$ حرکت می‌کند، درضمن $\vec{u'} \perp \vec{v}$ ($\vec{v}$، سرعت نسبی چارچوب‌های K' و K). مطلوب است سرعت ذره، $\vec{u}$، در چارچوب مرجع لخت K ومحاسبهٔ زاویهٔ φ، که بردار $\vec{u}$ با جهت قائم بر بردار $\vec{v}$ می‌سازد.



شکل ۲

۱۹۰۱. بردار سرعت ذره، $\vec{u'}$، در چارچـوب مـرجع لخت K' با جهت‌بردار $\vec{v}$ (سرعت نسبی حرکت چارچوب‌های مرجع K' و K). زاویهٔ φ' را می‌سازد. با استفاده از تبدیل گالیله، سرعت ذره، $\vec{u}$، را در چارچوب مرجع لخت K پیدا کنید.

۰۲۰.۱ $(n+1)$ چارچوب مرجع لخت بـا سرعت‌هـای نسبی معلوم (و در یـك جهت) داده شده است (شکل ۲). همچنین سرعت ذره، $\vec{u}_n$، در چارچوب‌مرجع‌لخت K_n معلوم است. مطلوب‌است‌سرعت ذره، درچارچوب مرجع K.

۰۲۱.۱ دو ذره به ترتیب با سرعت‌های $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ نسبت به چـارچوب مرجع لخت K، به‌سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید سرعت نزدیك شدن این دو ذره به یکدیگر، درچارچوب مرجع لخت K، برابراست با سرعت هریك از آن‌ها نسبت به‌ذرهٔ دیگر.

۰۲۲.۱ ثـابت بودن سرعت نسبی دو ذره، یعنی مستقل بودن آن از انتخاب یك چارچوب مرجع را اثبات کنید.

۰۲۳.۱ آیا شتاب ذره‌ها، تغییرناپذیر است؟

۰۲۴.۱ باتکیهٔ مستقیم برقانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها، تغییرناپذیری (ناوردایی) فضا و زمان را، برای چارچوب مرجع لخت، بیان‌کنید [۱۴.۱ و ۱۶.۱ را ببینید].

۴. دینامیك کلاسیك

۰۲۵.۱ الف) بستگی قانون لختی را با اصل نسبیت گالیله نشان‌دهید؛ ب) سازگاری‌قانون‌سوم دینامیك کلاسیك را (که به‌برهم‌کنش ذره‌هامربوط است)، با اصل دوم نظریهٔ نسبیت‌کلاسیك نشان دهید.

۰۲۶.۱ ثابت‌کنید، شکل ریاضی معادلـهٔ قانون‌دوم دینامیك نیوتون، ضمن انتقال از یك چارچوب مرجع لخت به‌دیگری، تغییر نمی‌کند.

۰۲۷.۱ قانون تبدیل‌اندازهٔ حرکت ذره، $\vec{p}=m\vec{u}$، را (کـه در آن، m جـرم و $\vec{u}$ سرعت است)، ضمن انتقال از یك چارچوب مرجع لخت K' به چارچوب مرجع لخت K پیدا کنید. آن‌گاه ثابت کنید:

$$\Delta\vec{p}=\text{inv} \quad \text{و} \quad \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\text{inv}$$

۰۲۸۰۱ ثابت کنید، در مکانیک کلاسیک، دو رابطهٔ قانون دوم نیوتون،
یعنی $m\vec{a}=\vec{F}$ و $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\vec{F}$ ، هم ارزند.

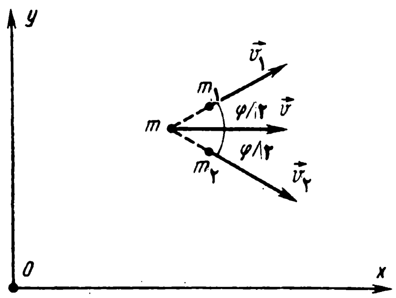
۰۲۹۰۱ نیروی $\vec{F}=\text{const}$، بـرجسمی به جرم m ، وارد می‌آیـد. سرعت جسم را به‌صورت تابعی از زمان، بیان کنید. آیا این سرعت متناهی است یا نامتناهی؟

۰۳۰۰۱ نقطه‌ای مادی به جرم m ، تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=\text{const}$، ازحالت سکون به‌حرکت درمی‌آید. انرژی جنبشی آن را، E_k، به صورت تابعی از سرعت v پیدا کنید.

۰۳۱۰۱ ذره‌ای به‌جرم m، که سرعت آن درچارچوب مرجع آزمایشگاه $\vec{v}$ است، به دوذره با جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ و ، به‌ترتیب، با سرعت‌های $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ وامی‌پاشد، به نحوی که

$$\widehat{(\vec{v}_۱,\vec{v})}=\widehat{(\vec{v}_۲,\vec{v})}=\frac{\varphi}{۲}$$

(شکل ۳). مقدارهای $v_۱$ و $v_۲$ را برحسب v بیان کنید.



شکل ۳

۰۳۲۰۱ ثابت کنید که، در فیزیک کلاسیک، نمی‌توان مفهوم انـرژی ساکن ذره را، به صورتی دقیق و صحیح، وارد کرد.

۰۳۳۰۱ با محاسبهٔ مستقیم (درزمینهٔ مربوط به‌برخورد کشسان وبرخورد

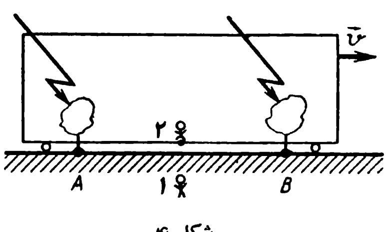
ناکشسان دوذره)، ثابت کنید بیان کلاسیک اندازهٔ حرکت و انرژی جنبشی همراه با قانون‌های بقای آن‌ها، با قانون کلاسیک تبدیل سرعت‌ها سازگار است.

۵. الکتریسیته و نور در فیزیك کلاسیك

۱۰۳۴. دو بار q و Q در چارچوب مرجع آزمایشگاه، با سرعت یکسان $\vec{v}$ حرکت می‌کنند. فاصلهٔ بین آن‌ها برابر است با $r = \text{const}$. نیرویی را که در دو چارچوب مرجع لخت (چارچوب آزمایشگاه و چارچوب متصل به‌بارها) متقابلاً بر این بارها وارد می‌آید، مقایسه کنید. آیا پاسخی که از این راه به‌دست می‌آید، با تجربه سازگار است؟

۱۰۳۵. ذره‌ای به‌جرم m و بار q، به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی یکنواختی با شدت $\vec{E}$، شتاب‌دار می‌شود. سرعت و قانون حرکت ماده را پیدا کنید. ثابت کنید به ازای $t \to \infty$ داریم: $v \to \infty$.

۱۰۳۶. در طول خط راه‌آهن، دو درخت A و B روییده است. ناظر ۱ در وسط آن‌ها قرار گرفته است. قطار درازی با سرعت $\vec{v}$ و در راستای A به B حرکت می‌کند و ناظر ۲ در آن قرار دارد. در لحظه‌ای که دو ناظر ۱ و ۲، پهلو به پهلو قرار می‌گیرند، دو آذرخش در نقطه‌های A و B می‌درخشد (شکل ۴). آیا ناظر ۲، دو درخشش آذرخش را هم‌زمان دریافت می‌کند؟



شکل ۴

۱۰۳۷. منبع نور تکفام با سرعت v (در چارچوب مرجع K) به‌طرف یك گیرندهٔ ساکن پیش می‌رود (بسامد تابش در چارچوب مرجع K_0 متصل

به چشمهٔ نور، $r_\circ$ است). مطلوب است بسامد r ، گیرندهٔ ساکن. سرعت نور را در چارچوب منبع، c بگیرید.

§ ۲. پایه‌های نظریهٔ نسبیت خاص
نسبی بودن فضا و زمان

۱. اصل‌های نظریهٔ نسبیت خاص

۰۱۰۲ ثابت کنید، وجود سرعت متناهی ثابت ($c = \mathrm{inv} < \infty$)، با تصور کلاسیك دربارهٔ ویژگی‌های فضا و زمان، متناقض است.

۰۲۰۲ درارتباط با اصل دوم نظریهٔ نسبیت خاص ، چارچوب مرجع لخت را، چگونه باید تعریف کرد؟

۰۳۰۲ اصل‌اول نظریهٔ نسبیت خاص ـ اصل نسبیت اینشتن ـ راتنظیم کنید وشرح‌دهید.

۰۴۰۲ آیا اصل‌های مربوط به ویژگی‌های عام فضا وزمان، در نظریهٔ نسبیت خاص ونظریهٔ نسبیت‌کلاسیك، با هم متفاوت‌اند؟

۰۵۰۲ آیاوجود نوعی محدودیت درمقدارسرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت، در نظریهٔ نسبیت خاص، به‌صورت اصل درآمده است؟

۰۶۰۲ آیافرض $v > c$ امکان‌پذیر است (v، سرعت نسبی دوچارچوب مرجع لخت و $c = \mathrm{inv} < \infty$)؟

۰۷۰۲ مسألهٔ مربوط به‌همسان‌گردی، ثابت بودن ومنحصر به‌فردبودن سرعت مبنا را، تحلیل کنید.

۰۸۰۲ آیا می‌توان، با تجربه، سرعت انتشار فرایند (فیزیکی) مبنا را تعیین کرد؟

۰۹۰۲ سرعت‌کدام فرایند فیزیکی‌مشخص، می‌تواند سرعت مبنا باشد؟

۰۱۰۰۲ چه آزمایش‌ها و مشاهده‌هایی در آزمایشگاه زمینی یا کیهانی می‌توان براساس الف) اصل نسبیت، ب) اصل $c = \mathrm{inv} < \infty$، انجام داد؟

۲. سیگنال نوری در خلاء. مستقل بودن سرعت نور از سرعت حرکت چشمهٔ آن

۰۱۱۰۲ قطاری روی‌مسیری مستقیم، بین‌ایستگاه‌های A و B، با سرعت v حرکت می‌کند. بعد از ایستگاه A، راننده نورافکن را روشن می‌کند که نور آن به اندازهٔ زمان t قبل از رسیدن خود قطار، به نگهبان ایستگاه B می‌رسد. مطلوب است جای روشن کردن نورافکن، به شرط آن که بدانیم $|AB|=l$.

۰۱۲۰۲ مطلوب‌است سرعت دورشدن یانزدیك شدن یك‌جسم آسمانی به‌شرطی‌که نسبت فاصلهٔ زمانی بین دوتپ الکترومغناطیسی متوالی‌که ازنقطهٔ ساکن O به سویش فرستاده شده‌اند، به فاصلهٔ زمانی بین لحظه‌های برگشت آن‌ها پس از بازتاب ازجسم، برابر ۵/۰ باشد.

۰۱۳۰۲ دو سفینهٔ فضایی، در طول خط راست مشترکی در یك جهت، به‌ترتیب، باسرعت‌های $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ پروازمی‌کنند (درچارچوب ستارگان‌ثابت). از سفینهٔ دوم و به دنبال سفینهٔ اول، دو تپ الکترومغناطیسی، به‌فاصلهٔ زمانی t_1، فرستاده می‌شود. این دو تپ، بعد از بازتاب ازسفینهٔ اول، درچه فاصلهٔ زمانی، به سفینهٔ دوم می‌رسند؟ (مقدار t_1 و مقدار مجهول، در چارچوب ستارگان ساکن، تعیین می‌شوند.)

۰۱۴۰۲ سفینهٔ فضایی با سرعت v پرواز می‌کند. درمسیرآن، سیارکی ظاهر می‌شود. در لحظه‌ای (طبق ساعت سفینه) سیگنالی الکترومغناطیسی از آن به‌طرف سیارك فرستاده می‌شود. فاصلهٔ بین سفینه وسیارك، دراین لحظه، برابر است با l. سیگنال ازسیارك بازمی‌تابد ورادار سفینه آن را می‌گیرد. سرنشینان سفینه برای انجام احتیاط‌های لازم، به مدت زمان t (طبق ساعت سفینه) نیاز دارند. فاصلهٔ l چقدر باشد تا حادثه‌ای پیش نیاید؟

۳. مسألهٔ هم‌زمانی

۰۱۵۰۲ چگونه می‌توان هم زمانی دو رویدادی راکه از نظر فضایی

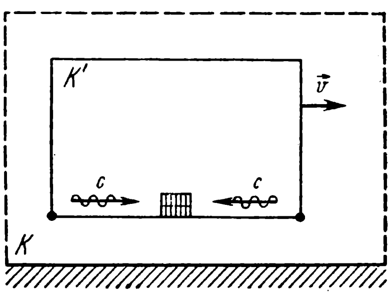
جدا ازیکدیگرند، برقرارکرد؟

۱۶۰۲. آیا دو رویدادی که دریك چارچوب‌مرجع‌لخت، هم‌زمان‌وهم مکان‌اند، درچارچوب مرجع‌لخت دیگرنیز، هم‌زمان وهم مکان خواهندبود؟

۱۷۰۲. دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K'، در دو انتهای پاره خطی که بر $\vec{v}$ عمود است، به‌طورهم‌زمان اتفاق افتاده است ($\vec{v}$، سرعت نسبی دو چارچوب لخت K' و K است). ثابت کنید دو رویداد مفروض، در چارچوب مرجع K نیز، هم زمان‌اند.

۱۸۰۲. مسألهٔ ۳۶۰۱ را، باتوجه به‌این حقیقت تجربی که سرعت نور ثابت است، حل کنید.

۱۹۰۲. در داخل آزمایشگاه K' ، که با سرعت v نسبت به‌آزمایشگاه K حرکت می‌کند، در وسط بین دیوارهای جلوی وعقبی، قفس پرنده‌ای (با اندازه‌های بسیارکوچك) قراردارد. درقفس، وقتی بازخواهد شد (ودر نتیجه، پرنده خواهدپرید) که پرتوهای نوری که به‌طورهم‌زمان ازدیوارهای آزمایشگاه K' سرچشمه می‌گیرند، به در قفس برسند (شکل ۵). آیا پرنده، نسبت به‌آزمایشگاه K هم آزاد خواهد شد؟



شکل ۵

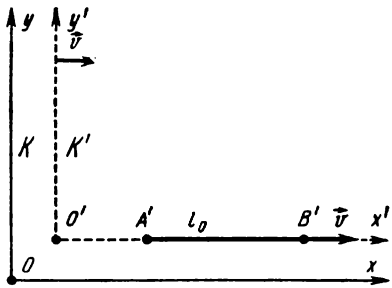
۴. قانون‌های نسبیتی دربارهٔ فاصله وزمان

۲۰۰۲. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۷۰۲ ثابت‌کنید: طول پاره خطی که برراستای سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K و K' عمود باشد، از نظر این چارچوب‌ها تغییرناپذیر است.

۲۱.۲. فرض کنید درچارچوب مرجع لخت K' ، در یك نقطهٔ O'، دو رویداد با اختلاف زمانی $\Delta t'$ اتفاق بیفتند. مطلوب است مقدار اختلاف زمانی Δt بین همین رویدادها، در چارچوب مرجع لخت K.

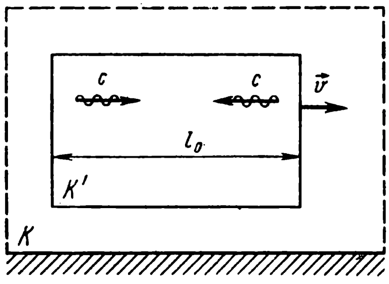
۲۲.۲. ثابت کنید نتیجهٔ مسألهٔ ۲۱.۲، برای حالتی هم که دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K، در نقطه‌های مختلف پاره خطی که برامتداد بردار سرعت $\vec{v}$ عمود است، اتفاق بیفتد ، درست است ($\vec{v}$ عبارت است از سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K).

۲۳.۲. پاره‌خط $A'B'$ درامتداد خود با سرعت v، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K ، حرکت می‌کند. این پـاره خط در چارچوب مرجع لخت K' ساکن و طولی برابر l_0 دارد (شکل ۶). اگر طول پاره خط متحرك را



شکل ۶

در چارچوب مرجع لخت K، با تعیین هم‌زمان فاصلهٔ بین دو انتهـای آن، اندازه بگیریم، چه رابطه‌ای با l_0 خواهد داشت؟



شکل ۷

۲۴.۲. در چارچوب مرجع لخت K' (آزمایشگاه)، آزمایش زیر را انجام داده‌ایم (شکل ۷): سیگنال نوری از دیوار عقبی آزمایشگاه گسیل می‌شود و پس از بازتاب در آیینه‌ای که بر دیوار جلوی نصب شده است، در جهت عکس برمی‌گردد. با بررسی این آزمایش، نسبت به هریك از چارچوب‌های مرجع K' و K (و با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۱.۲)، عبارتی را برای بیان طول آزمایشگاه K'، نسبت به چارچوب مرجع K پیدا کنید، به شرطی که طول حالت سکون آن l_0 باشد.

۲۵.۲. میله‌ای به طول سکون l_0، چنان در آزمایشگاه حرکت می‌کند که بردار سرعت آن، $\vec{v}$، با خود میله، زاویه‌ای برابر φ می‌سازد. مطلوب است طول میله، نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاهی.

۵. تبدیل‌های لورنتس. فاصله (بازه)

۲۶.۲. با استفاده از مسألهٔ ۲۳.۲، قانون ناهم‌زمانی دو رویدادی را، در چارچوب مرجع لخت K، بنویسید که در چارچوب مرجع لخت K' به طور هم‌زمان، در دو انتهای پاره‌خطی که موازی امتداد سرعت $\vec{v}$ است، اتفاق افتاده‌اند. طول پاره‌خط در چارچوب مرجع لخت K'، l_0 است.

۲۷.۲. مطلوب است فاصلهٔ بین دو نقطه‌ای که در آن‌ها، دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K اتفاق افتاده‌است؛ به‌شرطی که در چارچوب مرجع لخت K'، این رویدادها در نقطهٔ واحدی و به فاصلهٔ زمانی t_0 اتفاق افتاده باشند. سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع K' و K برابر است با $\vec{v}$.

۲۸.۲. در چارچوب مرجع لخت K'، دو رویداد اتفاق می‌افتد که با فاصلهٔ مکانی $\Delta x'$ و فاصلهٔ زمانی $\Delta t'$ از هم جدا شده‌اند. مطلوب است محاسبهٔ Δx و Δt برای این رویدادها، در چارچوب مرجع لخت K. محور-های x' و x از چارچوب‌های مرجع لخت K' و K، در همان جهت بردار سرعت نسبی $\vec{v}$ قرار دارند.

۲۹.۲. دستگاه قائم هریك از چارچوب‌های مرجع لخت K' و K،

به ترتیب $x'O'y'$ و xOy است. ضمناً، نقطه‌های O' و O به‌ازای $t' = t = 0$ برهم منطبق‌اند. با استفاده از نتیجه‌گیری‌های قبلی، بستگی مختصات و زمان یك‌رویداد، $A'(x', y', t')$ ، درچارچوب مرجع لخت K' را بامختصات و زمان‌همین رویداد، $A(x, y, t)$ ، درچارچوب مرجع لخت K پیدا کنید. این بستگی را، تبدیل لورنتس می‌گویند.

۲۰.۳۰ بـه‌کمك تبدیل لـورنتس، نتیجهٔ مسأله‌هـای **۲۰.۲۱** ، **۲۰.۲۳** ، **۲۰.۲۶** و **۲۰.۲۷** را به‌دست آورید.

۲۰.۳۱ آیامقدار $S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ تغییرناپذیر است؟ (S را بازهٔ دو رویدادی می‌نامند که با فاصلهٔ Δx واختلاف زمانی Δt ازهم جدا شده‌اند.)

برای حل مسأ لــه، از دو روش استفاده‌کنید: الف) تبدیــل لورنتس؛ ب) محاسبهٔ مستقیم برای چارچوب‌هــای مرجع لخت K' و K ، بــراساس کاربرد مستقیم اصل‌های نظریهٔ نسبیت خاص (یعنی، با روش آزمایش‌هــای ذهنی).

۲۰.۳۲ حالت‌های $S^2 > 0$، $S^2 = 0$ و $S^2 < 0$ را بررسی کنید وبه‌این پرسش‌ها، پاسخ‌دهید: ۱) آیا این‌تقسیم‌بندی بازه‌ها، در مجموعهٔ دورویداد، تغییرناپذیر است؟ ۲) فاصله‌های فضایی‌وفاصله‌های زمانی دو رویداد، برای هریك از این نوع بازه‌ها، چه ویژگی دارند.

۲۰.۳۳ در یك چارچوب مرجع لخت، دو رویداد در نقطه‌هایی کــه به فاصلهٔ ۱/۵ میلیون‌کیلومتر ازیکدیگر قراردارند، اتفاق افتاده است. آیا می‌توان رویداد دوم را نتیجه‌ای از رویداد اول‌دانست، به‌شرطی که رویداد دوم، الف) بعد ازیك ثانیه؛ ب) بعد از ۵ ثانیه؛ ج) بعد از ۱۰ ثانیه، اتفاق افتاده باشد؟ آیاچارچوب مرجع لختی وجود داردکه، در آن، رویدادهای مفروض هم زمان باشند؟ یا در یك مکان اتفاق افتاده باشند؟

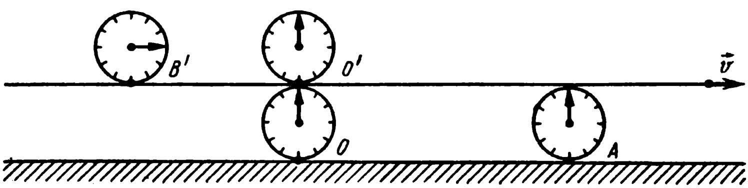
۲۰.۳۴ دریك چارچوب مرجع لخت دورویداد در فاصله 6×10^5 کیلومتر از یکدیگر و به‌فاصلهٔ زمانی ۱ ثانیه، اتفاق افتاده‌اند. سفینهٔ فضایی با چه‌سرعتی بایدپروازکند تا درچارچوب مرجع‌آن، این رویدادهاهم‌زمان باشند؟

۲۰.۳۵ شرط‌های مسالهٔ **۲۰.۳۴** را تغییرمی‌دهیم: فاصلهٔ مکانی 3×10^6

و فاصلهٔ زمانی ۱۵ ثانیه. سرعت سفینهٔ فضایی چقدر باشد تا، در چارچوب مرجع آن، دو رویداد هم مکان باشند؟

۶. نسبی بودن هم زمانی ساعت‌ها

۳۶.۲. دو خط کش بلند، یکی در امتداد دیگری، با سرعت v حرکت می کنند. روی هر یك از آن‌ها، دوساعت وجود دارد که، در چارچوب‌مرجع خط کش خودشان، هم‌زمان شده‌اند. فرض کنیم ساعت O (در یکی از خط کش‌ها) و ساعت O' (در خط کش دیگر)، در حالت انطباق فضایی، ثانیهٔ صفر را نشان دهند. وقتی نقطه‌های O' و A، B' و O برهم منطبق



شکل ۸

می‌شوند، ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهند (شکل ۸)، به‌شرطی که ساعت O' پاره خط OA را در ۱۰۰ ثانیه (با چارچوب مرجع ساعت O)، وساعت O' پاره خط $O'B'$ را (در چارچوب مرجع ساعت O') در ۵۰ ثانیه طی کند؟

۳۷.۲. در دوانتهای خط کشی به‌طول سکون l_0، که با سرعت v (نسبت به‌آزمایشگاه K) حرکت می کند، دو ساعت هم‌زمان شده A' و B' قراردارد. اختلاف این دو ساعت، درچارچوب مرجع آزمایشگاه K، چقدر است؟

۳۸.۲. در وسط خط کشی (مسالهٔ **۳۷.۲** را ببینید)، ساعت O'_1 که با ساعت O_1 در انطباق فضایی است، واقع شده است. ساعت O_1 نسبت به‌آزمایشگاه K بی‌حرکت است و دوساعت، زمان واحدی را نشان‌می‌دهند. زمان‌هایی را که ساعت‌های A' و B' نشان می‌دهند، با زمان ساعت O در چارچوب مرجع آزمایشگاه، مقایسه کنید.

۳۹.۲. دو نفر، یکی در قطاری با سرعت حرکت v $\left(\frac{v^2}{c^2}=0/75\right)$ و دیگری روی سکوی A در ایستگاه راه‌آهن، کتابی را با آهنگ خواندن مساوی، مطالعه می‌کنند. آن‌ها مطالعه را در یك زمان و در لحظه‌ای که قطار از کنار سکوی A می‌گذشت، آغاز کردند. شخصی که در ایستگاه A نشسته بود، کتاب را در لحظه‌ای تمام کرد که قطار (طبق برنامه) به‌ایستگاه بعدی، B، رسیده بود. پاسخ شما دربارهٔ شخصی که در قطار است: الف) در چارچوب مرجع ایستگاه A، ب) در چارچوب مرجع قطار، چگونه است؟

۷. مساله‌ها و تمرین‌هایی دربارهٔ کاربرد اثرهای فضا ـ زمانی نظریهٔ نسبیت خاص

۴۰.۲. در آزمایشگاه، دو ذرهٔ بنیادی ــ دو مزون [ذرهٔ باردار] ــ در یك زمان تولد یافتند. فاصلهٔ این دو مزون در لحظهٔ «تولد» l_0 بود. ضمناً، مزون ۱ با سرعت v به سوی مزون ۲ حرکت می‌کند. فاصلهٔ l_0 و سرعت v چنان است که هنگام رسیدن مزون ۱ به‌جایی که باید مزون ۲ باشد، مزون۲ وجود ندارد: این ذره واپاشیده است (ولی مزون ۱، به خاطر اثر نسبیت بر زمان، هنوز واپاشیده نشده است).

می‌توان بحث را برگرداند و مزون ۱ را ساکن به‌حساب آورد، یعنی همهٔ پدیده‌ها را در چارچوب آن، ساکن گرفت. در این صورت مزون ۲ متحرك می‌شود و این پرسش پیش می‌آید: آیا تناقضی وجود ندارد؟ در یك فاصلهٔ زمانی واحد، دریك چارچوب مرجع لخت تنها مزون ۱ «زنده» است، و در چارچوب مرجع لخت دیگر، تنها مزون ۲؟

۴۱.۲. در چارچوب مرجع لخت K دو سفینهٔ فضایی از نقطه‌های A و B، به‌فاصلهٔ l_0 از یکدیگر، هم زمان باهم و به‌ترتیب با سرعتهای v و $2v$ به‌سوی یکدیگر حرکت کردند. ساعت‌های سفینه‌ها در لحظهٔ برخورد، چه زمانی را نشان می‌دهند؟

۴۲.۲. قطاری که با سرعت v از ایستگاه (مبداء محاسبهٔ زمان وفاصله)

حرکت کرده است، از کنار ستون A کـه کیلومتر $l_\circ$ را نشان می‌داد، عبور کرد. ساعت مسافری که از پنجرهٔ قطار ایـن ستون را می بیند، چه زمانی را نشان می‌دهد؟ وقتی که ساعت مسافر، زمان $\frac{l_\circ}{v}$ را نشـان مـی دهـد، ستـون کیلومتر شمار کنار جاده، چه عددی را می‌نمایاند؟ فرض کنید $\frac{v^2}{c^2}=0/75$.

۴۳.۲. مزونی با سرعت $v=0/99c$ در چارچوب مرجع زمین، از محل «پیدایش» تا نقطهٔ «واپاشی» خود، فاصلهٔ (کیلومتر) $l_\circ=4/7$ را طی می کند. مطلوب است تعیین زمان «زندگی» مزون. اگر تاثیر نسبی بودن بر فاصله زمانی وجود نداشت، مزون چه فاصله‌ای را می‌توانست طی کند؟

۴۴.۲. دوذره باسرعت‌های یکسان $v=0/99c$ درامتداد خطراستی حرکت می کنند و به‌فاصلهٔ زمانی 10^{-8} ثانیه از یکدیگر، به‌مقصد می‌رسند (درچارچوب مرجع مقصد). مطلوب است محاسبهٔ فاصله بین ذره‌های‌متحرك، در چارچوب مرجعی که بر آن‌ها منطبق است.

۴۵.۲. روی لوکوموتیوی به‌طول $l_\circ$، نورافکنی روشن می‌شود. چه کسی برای نخستین بار درخشش روشنایی را می‌بیند: مسافر واگن آخر یا ناظـری روی‌خط راه‌آهن؟ سرعت قطار برابراست با v. نورافکن درلحظه‌ای (در چارچوب قطار) روشن می‌شود که دو ناظر در کنار یکدیگرند.

۴۶.۲. از نقطهٔ O درچارچوب مرجع لخت K دریك لحظه (به‌ازای $t=0$)، دو سفینهٔ فضایی در خلاف جهت یکـدیگـر و هر دو با سرعت v، حرکت کردند. بعد از فاصلهٔ زمانی Δt، طبق ساعت نقطهٔ O، نوری درسفینهٔ دوم درخشید. فضانوردسفینهٔ اول بعد ازچه‌زمانی، باساعت خودش،درخشش نور را می‌بیند؟

۴۷.۲. روی هر یك از دومحور عمود برهم x و y، یك سفینهٔ‌فضایی حرکت مـی‌کند. وقتی کـه دو سفینه در نقطهٔ O محل برخوردهـای x و y واقع‌اند، ساعت‌های سفینه‌ها (در چارچوب ستارگان xy) لحظهٔ $t=0$ را نشان می‌دهند. وقتی که ساعت هر یك از سفینه‌ها، زمان $t_\circ$ را نشان می‌دهند، از سفینه‌ها، سیگنال رادیویی بـه سوی O گسیل می‌شود. کـدام یك از این

سیگنال‌ها زودتر به O می‌رسند؟ به‌شرط آن‌که برای سفینهٔ اول داشته باشیم:
$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{2}$ و برای سفینهٔ دوم: $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{3}$.

۴۸.۲. قطاری با سرعت v به‌سوی چراغ راهنما حرکت‌می‌کند. وقتی فاصلهٔ بین لوکوموتیو و چراغ راهنما l_0 بود (در چارچوب مرجع لخت K منطبق برخط راه‌آهن)، در یك زمان (در K) چراغ سبز راهنما و نورافکن لوکوموتیو روشن شد. رانندهٔ لوکوموتیو چه‌موقع نورافکن را روشن‌کرده است: پس از دیدن علامت یا پیش از آن؟

۴۹.۲. در چارچوب مرجع قطاری، در لوکوموتیو، در وسط قطار و در بخش انتهایی آن، سه فانوس به‌طور هم‌زمان روشن می‌شوند. ناظری که روی خط راه‌آهن ایستاده است، این رویدادها را به‌چه ترتیبی دریافت می‌کند، به‌شرطی که درلحظهٔ‌روشن شدن فانوس‌ها (نسبت به‌چارچوب‌قطار): الف) در بخش انتهایی؛ ب) در وسط قطار؛ ج) در کنار لوکوموتیو، قرار گرفته باشد؟ سرعت قطار v و طول آن l_0 است.

۵۰.۲. در ایستگاه فضایی، حادثهٔ نشت اکسیژن پیش آمد. (ذخیرهٔ احتیاطی برای فاصلهٔ زمانی t_1، باقی مانده است.) در همین لحظه سیگنال فاجعه به مرکز گسیل می‌شود و ازآن جا، کمی بعد از دریافت سیگنال، سفینهٔ نجات با سرعت v به‌سوی ایستگاه حرکت می‌کند. ایستگاه خسارت دیده (از لحظهٔ گسیل سیگنال) بـه‌سوی مرکز و در همان مسیر حرکت سفینهٔ نجات سمت‌گیری می‌کند. می‌دانیم، میزان اکسیژن موجود، برای رسیدن به‌مرکز کفایت نمی‌کند. چه زمانی را برای تدارك سفینهٔ نجات صرف کـرده‌اند؟ ایستگاه و مرکز، در چارچوب مرجع‌کل، نسبت به‌هم، بی‌حرکت‌اند.

۵۱.۲. یکی از دو قلوها با یك سفینهٔ فضایی برای مأمـوریتی عملی به‌برج جوزا رفت. وقتی به‌مقصد رسید، درآن‌جا برای استقبال ازهمزادش، که ازهمان ایستگاه فضایی و به‌فاصلهٔ زمانی معینی بعد از حرکت سفینهٔ‌اول، با سفینه‌ای مشابه به سفینهٔ‌قبلی پرواز کرده بود، به‌انتظارماند. آیا وقتی دوبرادر به‌هم می‌رسند، بازهم همسال‌اند؟

۵۲.۲. یك سفینهٔ فضایی با سرعت v ازایستگاه فضایی حرکت‌می‌کند.

دوست‌فضانورد او در ایستگاه باقی‌می‌ماند. او می‌خواهد روز تولد فضانوردش را، که (بنا بر اطلاع او) بعد از گذشت زمان T از حرکت سفینه (بنا به تقویم ایستگاه) فرا می‌رسد، تبریک بگوید. چــه موقع سیگنال رادیویی را برای تبریک بفرستد تا به‌موقع به‌دستش برسد؟

۵۳۰۲. زمانی برابر t_0 از حرکت فضانورد گذشته بود (طبق ساعت شخصی او) که به‌او اطلاع دادند، نوه‌اش بــه دنیا آمده است. او بلافاصله رادیوگرام پاسخی خود را به‌مناسبت بالغ شدن نوه‌اش (رسیدن به‌سن T) فرستاد. سرعت سفینهٔ فضایی چقدر است.

۵۴۰۲. یکی از همزادان دوقلوها، برای یك مأموریت علمی، باسفینهٔ فضایی از زمین حرکت کرد. به‌محض رسیدن به‌مقصد، یك سیگنال رادیوئی به زمین فرستاد؛ در فاصلهٔ زمانی t بررسی‌های علمی خود را انجام داد و، سپس، به‌سوی زمین برگشت. همزاد او به‌محض دریافت سیگنال رادیوئی، با سفینهٔ مشابهی (با سرعت v) به‌استقبال او رفت. وقتی که دوقلوها به‌هم رسیدند، همسال بودند. مطلوب است فاصلهٔ زمین تا مقصد برادر اول. زمین و مقصد را نسبت به‌یکدیگر، ساکن فرض کنید.

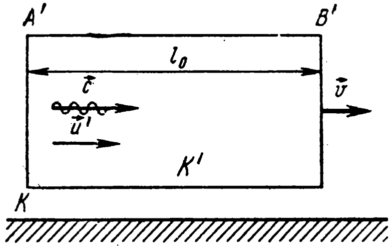
§ ۳. سینماتیك نسبیتی

۱. نتیجهٔ قانون نسبیتی تبدیل سرعت‌ها

۰۱۰۳ در چارچوب مرجع لخت K' (آزمایشگاه)، این آزمایش را انجام داده‌ایم: از دیوار عقبی به‌سوی دیوار جلوی، در یك زمان، یك سیگنال نوری (با سرعت c) و یك ذره (با سرعت u') فرستاده شده است (شکل ۹). چارچوب مرجع لخت K' با سرعت v نسبت به چارچوب مرجع لخت K چنان حرکت می‌کند که بردارهای $\vec{u}'$ و $\vec{c}$ با بردار $\vec{v}$ موازی باشند. با بررسی این آزمایش بــه ترتیب در K' و K و استفاده از قانون‌های نسبیتی مربوط

به‌بازه‌های فضایی و زمانی، سرعت u ذره را در چارچوب مرجع لخت K پیدا و آن را برحسب u'، v و c بیان کنید.

۲۰۳. قانون تبدیل سرعت طولی $(\vec{u'} \| \vec{v})$، یعنی نتیجهٔ مسالهٔ ۱۰۳ را با محاسبهٔ مستقیم و تنها با به‌کار بردن اصل‌های نظریهٔ نسبیت خاص وحقیقت مربوط به‌نسبی بودن فاصله به‌دست آورید.



شکل ۹

۳۰۳. قانون نسبیتی تبدیل سرعت طولی را، بر اساس تبدیل‌های لورنتس، به‌دست آورید.

۴۰۳. درچارچوب مرجع لخت K'، ذره‌ای باسرعت $\vec{u'} \perp \vec{v}$ حرکت می‌کند ($\vec{v}$، سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع K' و K است). سرعت $\vec{u}$ و جهت حرکت‌ذره‌درچارچوب مرجع لخت K را: الف) براساس قانون‌هایی که ضمن حل مسأله‌های ۲۵۰۲ و ۲۲۰۲ به دست آوردیم؛ ب) با استفاده از تبدیل‌های لورنتس، به‌دست آورید.

۲. مضمون قانون نسبیتی تبدیل سرعت‌ها

۵۰۳. ثابت کنید، مضمون حدی‌بودن سرعت ثابت c، درقانون‌نسبیتی تبدیل سرعت‌ها نهفته است (یعنی ثابت کنید، از $u' < c$ نتیجه می‌شود: $u < c$).

۶۰۳. آیا قانون نسبی بودن تبدیل سرعت را می‌توان برای حالتی به‌کار برد که u' و u، نه به‌معنای سرعت، بلکه به‌معنای نسبت بازهٔ فضایی

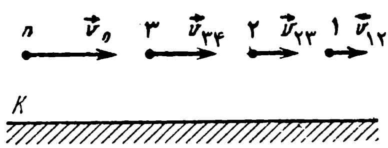
به‌بازهٔ زمانی دو رویداد دلخواه در چارچوب مرجع لخت مربوط باشد؟

۷.۳. براساس قانون نسبی بودن تبدیل سرعت، این‌حکم‌ها را ثابت کنید: از $u'>c$ نتیجه بگیرید $u>c$؛ ب) اگر $u'=\infty$، آن‌گاه $u=\frac{c^{2}}{v}$، ج) از $u'=\frac{c^{2}}{v}$ نتیجه بگیرید: $u=\infty$؛ د) اگر $u'=c$،آن‌گاه $u=c$.

۸.۳. چه رابطه‌ای بین مسألهٔ ۷.۳ با انـواع بازه و ناوردایی آن‌ها وجود دارد (مسألهٔ ۳۲.۲ را ببینید).

۹.۳. درستی این‌گزاره را ثابت‌کنید: «اگر در یك چارچوب مرجع لخت، سیگنالی فرانوری وجـود داشته باشد، چنان چارچوب مرجع لختی پیدا می‌شود که، در آن، سرعت بی‌نهایت است».

۱۰.۳. درچارچوب مرجع آزمایشگاه K، n ذره حرکت می‌کنند؛در ضمن می‌دانیم که v_{12}، سرعت ذرهٔ اول نسبت به‌ذرهٔ دوم، v_{23} سرعت ذرهٔدوم نسبت به‌ذرهٔ سوم، . . . و v_{n} سرعت ذرهٔ nام است (شکل ۱۰). مطلوب‌است



شکل ۱۰

سرعت ذرهٔ اول، v_{1}، نسبت بـه آزمایشگاه. از روی دستوری کـه به دست می‌آورید ثابت‌کنید، به‌ازای $n\to\infty$، داریم: $v_{1}\to c$ ؛ آن‌گاه، با نتیجهٔ مسألهٔ ۲۰.۱ مقایسه‌کنید.

۱۱.۳. دو ذره درچارچوب مرجع لخت K، به‌ترتیب با سرعت‌های $\vec{v}'_{1}$ و $\vec{v}'_{2}$ به‌سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. ثابت کنید «سرعت» نزدیك‌شدن آن‌هـا ثابت نیست ؛ یعنی در چـارچوب‌هـای K' و K بـا هم اختلاف دارند. حالت $v'_{1}=v'_{2}=\frac{1}{2}c$ و $v=\frac{1}{2}c$ را بـررسی‌کنیـد (v، سرعت نسبی چارچوب‌های K' و K است).

۱۲.۳. دو چشمهٔ نـور بـا سرعت‌های نسبی $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ در چارچوب مرجع لخت K، به‌سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. مطلوب است: الف) سرعت نزدیك شدن چشمه‌ها؛ «سرعت» نزدیك شدن تابش آن‌ها؛ ج) سرعت نزدیك شدن تابش یکی از چشمه‌ها به‌دیگری در دستگاه‌های مرجع K و K_1 (K_2) وابسته به‌یکی از چشمه‌ها؛ د) سرعت حرکت یك چشمه در چارچوب مرجع دیگری. مسأله‌را با روش نسبیتی وروش کلاسیك حل کنید ونتیجه‌های حاصل را با هم مقایسه کنید

۱۳.۳. برای دو چارچوب مرجع لخت K' و K، که نسبت به‌هم با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کنند، مطلوب است سرعتی مطلق (از لحاظ قدر مطلق)، غیر از سرعت ثابت.

۳. مثال‌هایی از سرعت‌های فرانوری

۱۴.۳. دودسته از پرتوهای موازی خورشید، تحت زاویهٔ φ بررویهٔ سطح میز فرود می‌آیند. مدادی عمود بر سطح میز و در امتداد محورش، با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند. سرعت سایهٔ مـداد چقدر است؟ آیـا ممکن است بیشتر از سرعت نور باشد؟

۱۵.۳. مطلوب است بستگی بین سرعت ظاهری وسرعت واقعی ذره، به شرطی که ناظر در جهت حرکت آن پرواز کند. آیا ممکن است سرعت ظاهری ذره بیشتر از سرعت نور باشد؟

۱۶.۳. میله‌ای (به طول بی‌نهایت) در چارچوب مرجع لخت K با سرعت $\vec{v}$ حرکت انتقالی دارد. میله با محور x، زاویـهٔ φ را می‌سازد. در لحظه‌ای از زمان، از نقطهٔ برخورد میله و محـور، یـك سیگنال نوری (در جهت حرکت میله) به‌سوی نقطهٔ A روی محور x، کـه درآن لحظه از میله بسیار دوراست، گسیل می‌شود. سیگنال نوری، یا محل برخوردمیله بامحور، کدام یك زودتر به‌نقطهٔ A می‌رسند؟ با چه شرطهایی؟

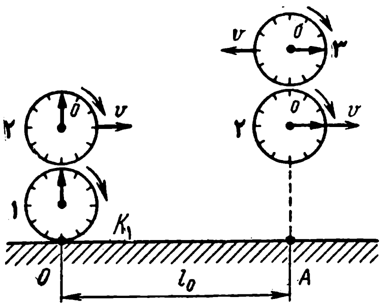
۴. کاربرد قانون نسبیتی تبدیل سرعت‌ها

۳.۱۷. دومیله با طول سکون l_0، هردوبا سرعت $\vec{v}$ نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، حرکت می‌کنند (جهت بردار $\vec{v}$ در امتداد محور است). مطلوب است طول یکی از میله‌ها در چارچوب مرجع مربوط به‌میلهٔ دیگر.

۳.۱۸. لوکوموتیوهای‌دوقطاری که‌از کنار نگهبان ایستگاه‌می‌گذرند، در یك لحظه به‌جایی می‌رسند که نگهبان ایستاده است. این قطارها روی خطهای موازی و در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند و طول سکون و سرعت‌آن‌ها به ترتیب l_0 و v است. مطلوب است زمان حرکت قطارها نسبت به‌هم: الف) در چارچوب مرجع وابسته به‌نگهبان ایستگاه؛ ب) در چارچوب مرجع هر یك از قطارها.

۳.۱۹. دو ذرهٔ مفروض با سرعت v به‌سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. چارچوب مرجع لختی را بیابید که این ذره‌ها، در آن، در خلاف جهت یکدیگر حرکت‌کنند و قدرمطلق سرعتشان یکی باشد.

۳.۲۰. درچارچوب‌مرجع لخت K_1، ساعت ۲ با سرعت $\vec{v}$ ازنقطهٔ O تا نقطهٔ A می‌رود. ساعت ۱ در نقطهٔ O در چارچوب مرجع K_1 ساکن است. وقتی ساعت‌های ۲ و ۱، از نظر فضایی برهم منطبق شوند، یك زمان‌را نشان می‌دهند (عقربه‌ها روی صفر می‌ایستند). ساعت ۲ در نقطهٔ A به ساعت ۳ که سرعتش $-\vec{v}$ است برخورد می‌کند (یعنی ساعت ۳، از A به‌سوی O می‌رود). وقتی ساعت‌های ۳ و ۲ به هم می‌رسند، یك زمان را نشان می‌دهند (شکل ۱۱). وقتی ساعت‌های ۱ و ۳ درنقطهٔ O به‌هم برسند، از نظرزمانی، چه وضعی نسبت به‌هم دارند؟ درچارچوب K_1 داریم: $|OA|=l_0$. مسأله‌را در این چارچوب‌های مرجع حل کنید: الف) در چارچوب مرجع K_1 (چارچوبی که ساعت ۱ در آن ساکن است)؛ ب) در چارچوب مرجع K_2 (چارچوبی که در آن، ساعت ۲ ساکن است)؛ ج) در چارچوب مرجع K_3 (چارچوبی که‌ساعت۳ درآن ساکن است). آیانتیجه‌های حاصل، تغییرناپذیر است؟



شکل ۱۱

۲۱.۳. «پارادوکس ساعت‌ها» را در چارچوب مرجع مسألهٔ **۱۹.۳** بررسی کنید.

§ ۴. دینامیك نسبیتی

۱. متناقض بودن مفهوم‌ها و قانون‌های دینامیك کلاسیك، از دیدگاه نظریهٔ نسبیت خاص

۱.۴. ثابت کنید، بیان کلاسیکی اندازهٔ حرکت، $\vec{p}=m\vec{v}$، از دیدگاه نظریهٔ نسبیت خاص، قابل قبول نیست.

۲.۴. بر اساس نظریهٔ نسبیت خاص، ثابت کنید بیان کلاسیکی قانون دوم نیوتون به‌صورت $m\vec{a}=\vec{F}$ ($m=\text{const}$) متناقض است.

۳.۴. آیا رابطهٔ مشهور انرژی جنبشی، $E_k=\frac{1}{2}mv^2$، با نظریهٔ نسبیت خاص سازگار است؟

۴.۴. دو ذره که با یکدیگر برهم‌کنش دارند، در فاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار گرفته‌اند. آیا در این جا، قانون سوم نیوتون (در چارچوب نظریهٔ نسبیت خاص) معتبر است؟

۵.۴. آیا عبارت‌های کمیتی قانون گرانش نیوتونی و قانون کولن،

در مورد برهم‌کنش بارهای الکتریکی، نسبی‌اند؟

۲. معرفی اندازهٔ حرکت و انرژی نسبیتی

۶.۴. ثابت کنید، اگر بیان اندازهٔ حرکت ذره را به‌صورت $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ فرض کنیم (که در آن $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ و v سرعت ذره در چارچوب مرجع لخت مفروض است)، آن‌گاه از قانون اصلی دینامیك به صورت $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ نتیجه می‌شود که، به ازای $\vec{F}=\text{const}$، قانونی برای تغییر سرعت ذره، $v=v(t)$، وجود دارد که با نظریهٔ نسبیت خاص سازگار است (یعنی به‌ازای $t\to\infty$ به‌دست می‌آید $v\to c$).

۷.۴. در چارچوب مرجع لخت K'، برخورد نوك به‌نوك ناکشسان دو ذرهٔ مشابه به وقوع پیوسته است؛ سرعت این دو ذره قبل از برخورد، به‌ترتیب، $\vec{v}$ و $-\vec{v}$ است. با بررسی این پدیده درچارچوب‌های مرجع لخت K' و K (که سرعت نسبی آن‌ها v است)، ثابت کنید بیان $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$، برای اندازهٔ حرکت نسبی ذره‌ها، و $E=\gamma mc^2$ برای انرژی کل نسبیتی، باهم سازگارند(همراه باقانون‌های بقای آن‌ها برای هرچارچوب مرجع جداگانه).

۸.۴. با فرض $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ و با بیان انرژی کل به‌صورت $E=mc^2+E_k$، رابطهٔ نسبیتی را برای انرژی جنبشی E_k پیدا کنید.

یادآوری. تجربهٔ ذهنی، که در مسألهٔ ۷.۴ شرح دادیم، مورد بررسی قرار دهید.

۹.۴. ثابت کنید، میان انرژی جنبشی در دینامیك نسبیتی، به‌ازای سرعت‌های کم v (یعنی به‌ازای $\frac{v}{c}\gg\frac{v^2}{c^2}$)، منجر به بیان کلاسیك آن می‌شود.

۱۰.۴. شتابگر ذره‌های بنیادی، بر اساس مصرف معینی انرژی، برای شتاب دادن به‌ذره‌ای با سرعت v طراحی شده است، به‌نحوی که $\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4}$. اگر محاسبه‌های مربوط به‌طراحی شتابگر را بر اساس قانون‌های مکانیك کلاسیك انجام داده باشیم، چه اشتباهی پیش می‌آید؟

۱۱.۴. حرکت چه سرعتی داشته باشد تا انرژی جنبشی ذره، برابر با انرژی حالت سکون آن باشد؟

۱۲.۴. انرژی جنبشی نسبی ذره را، برحسب مجذور اندازهٔ حرکت آن بنویسید.

۱۳.۴. سرعت ذره را برحسب اندازهٔ حرکت آن بنویسید.

۱۴.۴. ثابت کنید: $\frac{E^2}{c^2}=p^2+m^2c^2$.

۱۵.۴. مستقل از جرم، بستگی بین انرژی و اندازهٔ حرکت را بنویسید و برای حالت $v=c$، رابطه‌ای متناظر با آن، $\frac{E}{c}=p$، به دست آورید. در این ضمن، جرم ذره چقدر است؟

۳. مضمون رابطهٔ $E_0=mc^2$

۱۶.۴. ضمن گرم کردن آبی به‌جرم یك کیلوگرم از ۰ تا ۱۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد، انرژی $\Delta E=mc_p\Delta t$ مصرف شده است، که در آن $c_p=4/2$ (کیلو ژول بر کیلوگرم بر کلوین)، گرمای ویژهٔ آب است. جرم آب چقدر زیاد می‌شود؟

۱۷.۴. فنری با ضریب کشش $k=10^5$ نیوتون بر متر (n/m) را به‌اندازهٔ $\Delta x=1$ فشرده‌ایم. در ضمن، فنر به‌اندازهٔ $\Delta E=\frac{1}{2}k\Delta x^2$ انرژی کسب کرده است. جرم آن چقدر افزایش می‌یابد؟

۱۸.۴. انرژی حالت سکون جسمی به‌وزن یك کیلوگرم چقدر است؟

نیروگاه دنپر برای تولید این مقدار انرژی، چند سال بایدکار کند؟

۱۹.۴. بههر متر مربع از سطحی که در جو بیرونی زمین برپرتوهای خورشیدی عمود باشد، در هر ثانیه تقریباً ۱/۴ کیلو ژول انرژی خورشید تابیده میشود. خورشید در هر ثانیه، بهعلت تابش، چه مقدار از جرم خود را از دست میدهد؟ جرمخورشید برای چهمدتیکافی است تا بتواندبه‌تابش خود ادامه دهد؟ فاصلهٔ خورشید تا زمین در حدود $۱/۵ \times ۱۰^{۸}$ کیلومتر و جرمآن ۲×۱۰^{۳۰} کیلوگرم است.

۴.قانونهای بقای اندازهٔ حرکت و انرژی

۲۰.۴. گلولهای بـه جـرم m، با سقوط آزاد، بر صفحهٔ سختی فرو میافتد و به ارتفاعی کـه به اندازهٔ Δh کمتر از ارتفاع اولیه است به بالا میجهد. مطلوب است تغییرجرم گلوله، بهشرطیکه صفحه درنتیجهٔ برهمکنش با گلوله، مقدار انرژی Q را (بـه شکل گرما) کسبکند. آزمایش در خلاء انجام می گیرد. سرعتگلولـه، در لحظهٔ بـرخـورد با صفحه (و واجهش) نانسبیتی است.

۲۱.۴. جسم ساکنی بهجرم m، خود بهخود، بهدو بخش بهجرمهای $m_۱$ و $m_۲$ تجزیه میشود. مطلوب است انرژی $E_۱$ و $E_۲$، این دو بخش.

۲۲.۴. ثابت کنید، در چارچوبی که بین ذرههای آن برهمکنشوجود ندارد، داریم: $E^۲ - p^۲c^۲ = \mathrm{inv}$. این مقدار ثابت را پیدا کنید.

۲۳.۴.ذرهای بهجرم $m_۱$ وسرعت v با ذرهٔ ساکنی بهجرم $m_۲$ برخورد میکند و دو ذره به صورت یك ذرهٔ مرکب درمیآیند. جرم و سرعت این ذرهٔ مرکب را پیدا کنید.

۲۴.۴. دو ذره و هر یك بهجرم m، تحت زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ نسبت به یکدیگر با سرعت v (در چارچوب مرجع آزمایشگاه)، حرکت میکنند.مطلوب است جهت حرکت و سرعت و جرم ذرهٔ مرکب، به شرطی که: الف) دربرخورد ناکشسان این دو ذره؛ ب) بعد از برخوردکشسان آنها، بهدستآمده باشد.

۲۵.۴. ذره‌ای به‌جرم m و انرژی جنبشی E_k، با ذرهٔ ساکنی همسان خود برخورد می‌کند و به اندازهٔ زاویهٔ φ از مسیر خـــود منحرف می‌شود. مطلوب است انرژی جنبشی، E_{k_1}، ذرهٔ منحرف شده.

۵. قانون اصلی دینامیك نسبیتی

۲۶.۴. قانون اصلی دینامیك نسبیتی، $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}=\vec{F}$ $(\vec{p}=\gamma m \vec{v})$ ، را برای این حالت‌ها بنویسید: الف) $\vec{F} \parallel \vec{v}$؛ ب) $\vec{F} \perp \vec{v}$.

۲۷.۴. با استفاده از قانون اصلی دینامیك نسبیتی، قانون تبدیل را (ضمن تبدیل چارچوب‌های مرجع لخت K' و K بـــه‌یکدیگر) برای مؤلفهٔ عرضی (عمود بر $\vec{v}$) و طولی (موازی با $\vec{v}$) نیرویی که برذرهٔ ساکن دریکی از این چارچوب‌ها (K' یا K) درجهت سرعت نسبی، v، وارد می‌آید، پیدا کنید.

۲۸.۴. با فرض‌این‌که تبدیل انرژی‌کل، E، ذره‌ای به‌جرم m، برابر با کار نیرویی باشد کـــه بر آن وارد می‌آیـــد، با محاسبهٔ مستقیم، رابطه‌هایی برای انرژی‌کل، E، و انـــرژی جنبشی، E_k، از ذره پیدا کنید (مسأله ۸.۴ را ببینید).

۲۹.۴. جسمی به‌جرم m وانرژی E_k به‌فاصلهٔ l از ایستگاه، بانیروی مقاومت ثابت F_c، ترمز می‌کند. جرم جسم را در لحظه‌ای که می‌ایستد، پیدا کنید.

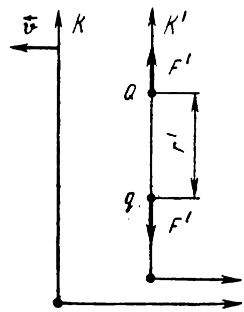
۳۰.۴. ذره‌ای به جرم m با نیروی $F=F_0(1+\alpha t)$ از سرعت ۰ به‌حرکت می‌آید (F_0 و α، مقدارهایی ثابت‌اند). مطلوب است سرعت‌ذره، در لحظهٔ t. حالتی از نیروی $F=F(t)$ را در نظر بگیرید کـــه بـــه ازای $t \to \infty$ داشته باشیم: $F(t) \to \infty$: ثابت کنید، در ایـــن حالت، سرعت ذره بعد از فاصلهٔ زمانی محدودی، همیشه محـــدود و کمتر از سرعت مبنا باقی می‌ماند.

§ ۵. الکترو دینامیک

۱. برهم‌کنش فوری. الکترومغناطیس، به‌عنوان اثر نسبیتی

۵.۱. آیا بار الکتریکی کمیتی ثابت است؟ چه آزمایش‌هایی، پاسخ شما را تأیید می‌کند؟

۵.۲. در چارچوب مرجع لخت K'، روی پاره خطی عمود بر $\vec{v}$ ـ سرعت نسبی K' و Kـ دو بار ساکن q و Q به‌فاصلهٔ r' از یکدیگر قرار دارند (شکل ۱۲). بین آن‌ها، نیروی کولن F' عمل می‌کند. مطلوب است نیروی F، برهم‌کنش بارهای مفروض در چارچوب مرجع لخت K.



شکل ۱۲

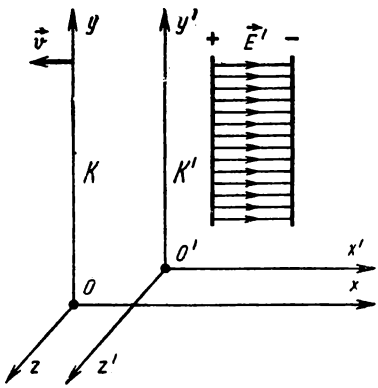
۵.۳. مفتولی به‌طول بی‌نهایت که به صورت یکنواخت باردار شده است، با سرعت $v = \text{const}$ (در چارچوب مرجع آزمایشگاه)، به‌موازات خودش منتقل می‌شود. چگالی خطی بار در چارچوب مرجعی که مفتول در آن ساکن است، λ_0 است. در فاصلهٔ r از مفتول بار q، موازی با آن، با همان سرعت و در همان جهت حرکت می‌کند. تأثیر نیروی الکترومغناطیسی را بر بار پیدا کنید.

۵.۴. بارمنفی Q، موازی با رسانای بی‌حرکتی که جریان I در آن وجود دارد با سرعت v آغاز به‌حرکت می‌کند. بار و رسانا چه برهم‌کنشی دارند؟

۵.۵. رابطهٔ مربوط به‌نیرویی را شرح دهید (نیروی لورنتس) که از

جانب میدان مغناطیسی بر ذرهٔ متحرك وارد می آید.

۶.۵. میدان یکنواختی با شدت $\vec{E'}$ در چارچوب مرجع لخت K' داده شده است. مطلوب است بردار شدت $\vec{E}$ در چارچوب مرجع لخت K. چارچوب‌های K' و K با سرعت نسبی $\vec{v}$ مــوازی با خطهای شدت میدان حرکت می کنند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

۷.۵. مسألهٔ ۶.۵ را برای حالتی که $\vec{v}$ عمود برخطهای شدت میدان باشد، بیان کنید.

۸.۵. قانون تبدیل بردار القای مغناطیسی $\vec{B}$ را پیدا کنید.

۹.۵. مسألهٔ ۸.۵ را برای شدت میدان الکتریکی، $\vec{E}$، حل کنید.

۱۰.۵. بر اساس پاسخ‌های دو مسألهٔ ۸.۵ و ۹.۵ دربارهٔ قانون‌های مربوط به‌تبدیل سرعت‌های $\vec{B}$ و $\vec{E}$ ثابت کنید:

$$c^2B^2 - E^2 = \text{inv} \qquad \vec{B}\cdot\vec{E} = \text{inv}$$

۲. حرکت ذره‌های باردار در میدان الکتریکی

۱۱.۵. مطلوب است سرعت ذره‌ای به جرم m و بار q، تحت تأثیر

اختلاف پتانسیل U، به‌شرطی که سرعت اولیهٔ آن، صفر باشد.

۰۱۲۰۵ در میدان الکتریکـی یکنواختـی با شدت $\vec{E} = \text{const}$، ذره‌ای با اندازهٔ حرکت اولیهٔ $\vec{p}_\circ$ و بار q در امتداد خط‌های نیرو حرکت می‌کند. سرعت آن را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۰۱۳۰۵ مطلوب است محـاسبهٔ l، طول مسیر حرکت ذره‌ای باردار نسبت به بار e، جرم m و انرژی اولیهٔ W، در حالتی کـه میدان الکتریکی یکنواخت به‌شدت $\vec{E}$، موازی سرعت اولیهٔ ذره، دربرابر حرکت آن‌مقاومت کند.

۰۱۴۰۵ درمیدان مغناطیسی یکنواختی با شدت $\vec{B} = \text{const}$، ذره‌ای با جرم n و بار q با سرعت $\vec{v}_\circ \perp \vec{B}$ حرکت می‌کند، قـانون حرکت آن‌را پیدا کنید.

§ ۶. نسبیت در نور شناخت و فیزیك هسته‌ای

۱. موج‌های نوری در محیط. چارچوب‌های نوری متحرك

۰۱۰۶ درآزمایشگاه K'، موج نوری از دیوار عقبی به طرف دیوار جلوی و برعکس منتشر می‌شود. مطلوب است نسبت زمان این جریان رفت‌و برگشتی درچارچوب مرجع لخت K'، برزمان آن در چارچوب مرجع لخت K (سرعت نسبی چارچوب‌ها را v بگیرید)، به شرطی که فضای آزمایشگاه K' را محیطی با ضریب‌شکست n پر کرده باشد وفاصلهٔ بین دیوارها $l_\circ$ باشد.

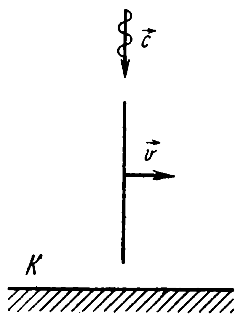
۰۲۰۶ ثابت کنید ضریب شکست، مطلق نیست.

۰۳۰۶ در داخل لوله‌ای پر ازآب (آب با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند) یك چشمهٔ نوری و یك آئینهٔ کوچك، به فاصلهٔ l از یکدیگر، قرار گرفته‌اند.

صفحه‌آئینه بر بردار سرعت، v، عمود است. زمان انتشار موج نوری را از چشمه و برعکس، در چارچوب مرجع آزمایشگاه، پیدا کنید.

۶.۴. میلهٔ شیشه‌ای به‌طول سکون $l_0 = ۵۰^{cm}$ با سرعت $v = ۳۰^m/s$ حرکت می‌کند. موج نوری از میله در جهت حرکت آن و در خلاف جهت حرکت آن می‌گذرد. در چارچوب مرجع آزمایشگاه، اختلاف زمان انتشار موج نوری را در دو جهت پیدا کنید.

۶.۵. میلهٔ نازك شیشه‌ای (با ضریب شکست n)، چنان در آزمایشگاه جابه‌جا می‌شود که همیشه بر سرعت حرکت خود، $\vec{v}$، عمود باقی می‌ماند (شکل ۱۴). سرعت نور را در میله، نسبت به‌چارچوب مرجع آزمایشگاه، پیدا کنید.



شکل ۱۴

۶.۶. آئینه‌ای با سرعت v به‌سوی چشمهٔ نور حرکت می‌کند (صفحهٔ آئینه بر امتداد حرکت آن عمود است). سرعت انتقال تصویر چشمه چقدر است؟

۶.۷. در چارچوب مرجع لخت K، آئینه‌ای با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند و صفحهٔ آن با بردار $\vec{v}$ موازی است. در چارچوب مرجع لخت K'، وابسته به آئینه، پرتو نور تحت زاویهٔ φ بر آئینه فرود می‌آید. زاویهٔ تابش را در چارچوب K پیدا کنید.

۲. اثر دوپلر. ابیراهی (انحراف)

۸.۶. «اتومبیلی» به‌چراغ راهنمائی که خراب شده است و تنها نور قرمز را گسیل می‌دهد با سرعت نسبیتی نزدیك می‌شود. آیا از چراغ راهنما عبور می‌کند؟

۹.۶. یك سحابی چگونه نسبت به‌زمین حرکت می‌کند، به شرطی که بدانیم خط هیدروژن H_γ $(\lambda = ۴/۳۴ \times ۱۰^{-۷} m)$ در طیف سحابی، روی $۲ \times ۱۰^{-۹} m$ به‌سوی قرمز جا به‌جا می‌شود؟

۱۰.۶. طبق آئین‌نامهٔ کیهان‌نوردی (کــه البته، مربوط به‌آرزوهای آینده است) باید در سفینهٔ فضایی فرستنده‌ای وجود داشته باشد که‌موج‌های الکترومغناطیسی با بسامد $\nu_\circ$ در فضای کیهانـــی گسیل کند. بخش خدمات فرودگاه کیهانی با گرفتن سیگنال‌های سفینهٔ فضایی می‌تواند دربارهٔ‌قدرمطلق سرعت‌سفینه وجهت حرکت‌آن داوری کند. چگونه؟ حالتی را درنظر بگیرید که سرعت سفینه با راستای به‌سوی ایستگاه فضایی، زاویهٔ ۰ یا ۱۸۰ درجه بسازد.

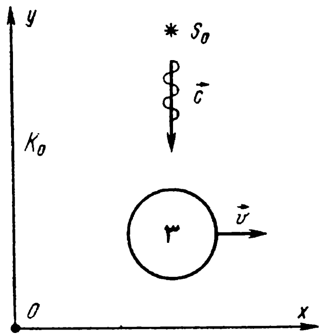
۱۱.۶. موشکی با سرعت نسبیتی v در ارتفاع H بالای سطح زمین حرکت می‌کند. روی موشك دستگاه فرستنده‌ای با بسامد مشخص $\nu_\circ$ نصب شده‌است. مطلوب است بسامد ν، علامت رادیویی در گیرنده‌ای که‌درایستگاه زمینی قرار دارد، وقتی که موشك از بالای آن می‌گذرد.

۱۲.۶. در چارچوب مرجع لخت K، سرعت چشمهٔ نور، $\vec{v}$، با خط مشاهده زاویهٔ θ تشکیل می‌دهد. در چارجوب K' (چشمه)، نور با بسامد $\nu_\circ$ می‌تابد. ناظر نور را با چه بسامدی دریافت می‌کند؟

۱۳.۶. سفینه‌ای با سرعت $\vec{v}$، نسبت به‌چارچوب‌ستارگان ساکن پرواز می‌کند، ۱) تغییرچگالی ستارگان قابل رویت را دردوروبر امتداد $\vec{v}$؛ تغییر درخشندگی و نور ستارگان را در چارچوب مرجع سفینه، شرح دهید.

۱۴.۶. زمین در چارچوب مرجع ستارگان ساکن، $K_\circ$، با سرعت v حرکت می‌کند. مطلوب است زاویهٔ φ که محورتلسکوپ واقع درآزمایشگاه

زمینی با امتداد تابش ستاره‌ای در چارچوب $K_\circ$ عمود بر $\vec{v}$ تشکیل می‌دهد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

۱۵.۶. نوری با بسامد $\nu_\circ$ بر آئینه‌ای که با سرعت v حرکت‌می‌کند، می‌تابد. مطلوب است بسامد نور بازتابیده، وقتی که نور و آئینه: الف) در یك جهت؛ ب) در جهت‌های مخالف یکدیگر، حرکت می‌کنند.

۳. ماهیت‌کوانتومی نور

۱۶.۶. دستور مربوط به‌فشار نور را (برای سطح تیره) پیدا کنید.

۱۷.۶. نیروی کل‌ناشی ازتابشی به‌توان یك‌وات چگونه واردمی‌آید؟

۱۸.۶. آیا قانون پلانك برای انرژی فوتون، $\varepsilon = h\nu$، در حالتی که انرژی و بسامد به‌انتخاب چارچوب مرجع وابسته باشد، درست است؟

۱۹.۶. فوتونی با بسامد $\nu_\circ$ عمود برآئینه‌ای فرود می‌آید که با سرعت v در چارچوب مرجع لخت K به‌سوی آن حرکت می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ اندازهٔ حرکتی که ضمن بازتاب فوتون به‌آئینه داده می‌شود: الف) در چارچوب مرجع وابسته به‌آئینه؛ ب) در چارچوب مرجع K.

۲۰.۶. ذرهٔ بارداری با سرعت ثابت v در محیطی با ضریب شکست n، حرکت می‌کند. با استفاده از قانون‌های بقای انرژی و اندازهٔ حرکت، بستگی بین زاویهٔ θ که تحت‌آن تابش فوتونی این ذره انجام می‌گیرد و

بسامد آن، ν، را پیدا کنید. ثابت کنید. این تابش، تنها با شرط $\nu > c'$ پدید می‌آید (c' سرعت نور در محیط است).

۲۱.۶. بنا بر اثر کامپتون: وقتی فوتون روی الکترون ساکن می‌لغزد، روی آن، همچون ذره‌ای برذرهٔ دیگر جابه‌جا می‌شود. انرژی فوتون‌جابه‌جا شده را برحسب انرژی فوتون پراکنده شده وزاویهٔ انحراف آن را ازجهت اولیه، پیدا کنید.

۲۲.۶. هستهٔ آزاد برانگیختهٔ ساکن (انرژی برانگیختگی $\Delta\varepsilon$)، کوانتوم γ گسیل می‌کند. بسامد آن، ν، را پیدا کنید. جرم هستهٔ برانگیخته برابر است با m. چرا $\nu \neq \frac{\Delta\varepsilon}{h}$؟ اگر هسته به‌یك شبکهٔ بلور به‌سختی محکم شده باشد، چه تغییری به‌وجود می‌آید؟

۴. فیزیك هسته‌ای ذره‌های بنیادی

۲۳.۶. ذرهٔ A_1 روی هستهٔ ساکن A_2 می‌لغزد (در چارچوب K). در نتیجهٔ واکنش هسته‌های A_3 و A_4 تشکیل می‌شوند:

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4$$

جرم ذره‌های ساکن به‌ترتیب m_1، m_2، m_3 و m_4 است. مطلوب است‌مقدار انرژی ناشی از این واکنش.

۲۴.۶. مطلوب است انرژی حاصل از واکنش

$${}^{7}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{8}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$$

۲۵.۶. مطلوب است انرژی مصرف شده در واکنش

$${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$$

۲۶.۶. انرژی پروتون چقدرباشد تا بتوان در نتیجهٔ واکنش‌هسته‌ای

$${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{7}_{4}Be$$

نوترون ساکن در چارچوب مرجع آزمایشگاه به‌دست‌آورد؟

۲۷.۶. مطلوب است انرژی پیوندی و کاهش جرم هستهٔ اتم‌های ${}^{4}_{2}He$، ${}^{27}_{13}Al$.

۶.۲۸. چه انرژی جنبشی، E_k، باید بـه سفینهٔ بین ستاره‌ای به جرم $m_1 = 10^4$ (کیلوگرم) داد تا ساعت آن، در برگشت به‌زمین، زمانی به‌اندازهٔ نصف‌ساعت زمین‌را نشان دهد؟ به‌ازای این انرژی جنبشی، سرعت سفینه، v، چقدر است؟ چقدر اورانیوم باید مصرف کرد تا این انرژی جنبشی فراهم شود؟ (با واپاشی یك اتم اورانیوم، ۱۷۰میلیون الکترون ولت انرژی آزاد می‌شود.)

۶.۲۹. در چارچوب مرجع آزمایشگاه، ذرهٔ A (به‌جرم m و اندازهٔ حرکت p) به ذرهٔ ساکن B برخورد می‌کند. آیا ذرهٔ B می‌تواند ذرهٔ A را جذب کند؟

۶.۳۰. ثابت کنیدتنها درحالتی‌ممکن است زوج الکترون‌ـپوزیترون با یك کوانتوم γ بـه‌وجود آید که ذرهٔ با جرم ساکن $m_1 \neq 0$ در واکنش شرکت‌کرده باشد. مطلوب است انرژی‌آستانه، ε، واکنش ایجاد این زوج.

۶.۳۱. پوزیترونی با انـرژی جنبشی $E_k = 1/5$ (میلیون الکترون ولت) روی الکترون ساکن می‌لغزد. در نتیجهٔ این برخورد، دو کوانتوم γ با انرژی‌هـای یکسان ایجـاد مـی‌شود. مطلوب است زاویـهٔ بین حرکت کوانتوم‌های γ.

فصل دوم

عنصرهای نظریهٔ نسبیت و فیزیك نسبیتی

در

حل مسأله‌ها، پرسش‌ها و تمرین‌های فصل اول

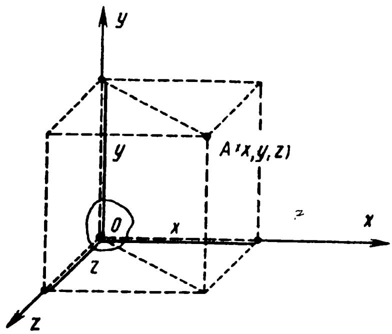
§ ۱. نظریهٔ نسبیت کلاسیك. مبنای فیزیك نیوتونی

۱۰۱. چارچوب مرجع، به‌مجموعه‌ای از ابزار محاسبه ووسیله‌های اندازه‌گیری ـ مقیاس‌های فضا وزمان ـ گفته می‌شود.

این تعریف از چارچوب مرجع، به‌خودی‌خود به‌وجود نیامده است، بلکه نتیجه‌ای است از مفهوم حرکت نقطهٔ مادی ومسألهٔ مربوط به‌بیان‌آن. در واقع، حرکت نقطهٔ مادی به‌فرایند جابه‌جایی موضع آن درفضا ضمن جریان زمان گفته می‌شود. ولی روشن است‌که فضا یا مکان، به‌خودی‌خود و بدون وجود جسم‌های واقعی، مفهومی ندارد و، بنابراین، جملهٔ «موضع آن درفضا» تا زمانی‌که جسمی مشخص نشودکه بتوان، نسبت به‌آن، موضع هر نقطهٔ مادی را «محاسبه‌کرد»، جمله‌ای بی‌معنی خواهد بود، همین جسم است‌که «چارچوب مرجع» نامیده می‌شود. در این صورت، وقتی از فضا صحبت می‌کنیم، قصدمان فضا به‌طورکلی نیست، بلکه منظورمان فضای معینی است‌که ازطریق «جسم مرجع» انتخاب شده است.

ازآن‌جاکه برای توضیح حرکت باید بتوانیم موضع نقطهٔ مادی را درفضای چارچوب مرجع وهمچنین، زمان متناظر آن را مشخص‌کنیم، باید از مفهوم چارچوب مرجع و ابزارهای اندازه‌گیری ـ مقیاس‌های فضایی و ساعت ـ استفاده‌کنیم. این نیازرا به‌این‌ترتیب برمی‌آوریم. به‌جسم مرجع، دستگاه قائم مختصات دکارتی (x, y, z) را مربوط می‌کنیم، به‌نحوی‌که مبداءآن درجسم مرجع (ومثلا درگرانیگاه‌آن) اختیار شده‌باشد، ومحورهای

آن درجهت اشیاء مادی معینی (که نسبت به‌جسم مرجع ساکن‌اند) قرار گرفته باشند (شکل ۱۶). «بستگی» دستگاه مختصات به‌جسم مرجع، به‌معنای قابل محاسبه‌کردن فضای «جسم مرجع» است، به‌نحوی که هر نقطه از فضا با سه عدد x، y و z مشخص می‌شود. روشن است که همهٔ نقطه‌های فضا، از راه انتخاب‌های متفاوت این سه عدد به‌دست می‌آیند.



شکل ۱۶

از آن‌جا که قابل محاسبه‌کردن فضا، به‌کمك مقیاس‌ها تحقق می‌یابد، انتخاب دستگاه مختصات می‌تواند ابزارهای اندازه‌گیری فضایی چارچوب مرجع را دراختیار ما بگذارد.

می‌پرسیم: ساعت تا چه اندازه برای شرح حرکت نقطهٔ مادی لازم است؟ برای این‌که به‌این پرسش پاسخ بدهیم، مثال ساده‌ای را بررسی می‌کنیم: قطار مسکو ــ ولادی‌وستوك (که فاصلهٔ بین ابتدا تاانتهای‌آن، قریب ۱۱ هزارکیلومتراست) درساعت ۰۰ به‌وقت مسکو (که روی ساعت ایستگاه یاروسلاو نشان داده شده است)، ازمسکوحرکت می‌کند. می‌پرسیم: آیا تنها با ساعتی که درایستگاه مسکووجود دارد، می‌توان حرکت قطار را درتمام طول راه ازمسکو تا ولادی‌وستوك، توصیف کرد؟ روشن‌است که‌پاسخ به‌این پرسش، منفی است. به‌طورکلی، بی‌نهایت ساعت لازم است که در همهٔ نقطه‌های فضا مستقر باشند و، البته، همهٔ آن‌ها هم یکسان باشند (یعنی‌حرکت آن‌ها، مثل هم باشد).

به‌دوطریق می‌توان هر نقطه از فضا را (یعنی فضای جسم مرجع انتخابی را) با ساعت تأمین کرد: ۱) ساعتی را «فراهــم آوریم»، آن را در نقطهٔ O (مبداء دستگاه مختصات) بگذاریم و، سپس، به‌همهٔ نقطه‌های دیگر فضا منتقل کنیم؛ ۲) ساعت‌هایی راکــه همسان ساخته شده‌اند، در هر نقطهٔ فضا، مستقلاً قرار دهیم.

درهردوحالت باید همهٔ ساعت‌ها را «هم‌زمان» کرد. درعمل، هم‌زمانی ساعت‌های آماده شده را یا ازراه انتقال آن‌ها ویا به‌کمك سیگنال‌ها تحقق می‌بخشند. به‌این‌ترتیب درمثال ما، ساعت‌هایی‌که در مسکــو تهیه شده است، به‌وقت مسکو، دربرابر مسافران خواهد بود. ولی چگونه می‌توان اطمینان داشت‌که بعد از انتقال به‌یك نقطهٔ مسکونی دیگر، بازهم این ساعت همچون سابق، وقت مسکو را نشان دهــد، یعنی با ساعت‌هایی‌که در مسکــو هستند هم‌زمان باشد؟

خواننده ممکن‌است، دراین‌جا، عملی‌ترین‌روش هم‌زمان‌کردن ساعت‌ها را به‌یاد بیاورد ـ به‌کمك سیگنال زمان دقیق (که به‌وسیلهٔ رادیو از مسکــو گسیل می‌شود). اگر فاصلهٔ مسکو تا نقطهٔ مسکونی مفروض معلوم باشد واگر سرعت حرکت سیگنال را بدانیم، با درنظرگرفتن زمان لازم برای رسیــدن سیگنال، می‌توانیم ساعت خود را با وقت مسکوتنظیم‌کنیم.

یادآوری ایــن مطلب لازم است‌که، هر دو روشی‌که برای هــم‌زمان کردن ساعت در فضای «جسم مرجع» نام بردیم، ازنظر اصولی عملی است. درفیزیك کلاسیك از این روش‌ها برای قبول فرض‌های زیر استفاده می‌شود: ۱) جابه‌جایی وحرکت ساعت (برای نشان دادن زمان)، در مقایسه با ساعت ساکن، اثری در آن ندارد؛ ۲) سیگنال بی‌نهایت سریعــی وجود داردکــه زمان دقیق را مشخص می‌کند وبه‌کمك آن، همهٔ ساعت‌ها در فضــا، هم‌زمان می‌شوند.

این مطلب راکه، چرا در فیزیك کلاسیك از سیگنــال الکترومغناطیسی استفــاده نمی‌شود، بعداً روشن خواهیم‌کرد، که تمامی‌طرح ومضمون فیزیك کلاسیك (همهٔ مفهوم‌ها وقانون‌های آن)، به‌طور جدی وناگسستنی، با فرض

مربوط به‌سیگنال بی‌نهایت سریع (یعنی سیگنال باسرعت بی‌نهایت) بستگی دارد.

به‌این‌ترتیب، جسم مرجع همراه با دستگاه مختصات و مجموعه‌ای نامتناهی از ساعت‌های یکسان و هم‌زمان (که در همهٔ نقطه‌های فضا مستقر شده‌اند)، چارچوب مرجع را تشکیل می‌دهند که برای تعریف مفهوم حرکت نقطهٔ مادی وتوصیف این حرکت لازم است.

۲۰۱. چارچوب مرجع لخت به‌چارچوبی گفته می‌شود که در آن، قانون لختی(اینرسی) حاکم باشد. نقطهٔ مادی آزاد یا ساکن است ویا به‌طور یکنواخت روی خط مستقیم حرکت می‌کند.

چارچوب مرجع واقعی، یك چارچوب لخت نیست ومی‌توان گفت، چارچوبی است که گاهی کمتر و گاهی بیشتر، با چارچوب مرجع لخت تطبیق می‌کند. مثلاً چارچوب مرجع وابسته به‌گرانیگاه زمین، نسبت به‌چارچوب مرجع وابسته به‌گرانیگاه خورشید، کمتر لخت است؛ درحالی‌که چارچوب مرجع وابسته به‌هستهٔ کهکشان ما، بیشتر از چارچوب مرجع وابسته به‌مرکز خورشید، لخت است. بنابرتجربه، چارچوب لخت وابسته به‌ستارگان ثابت، بیش از هر چارچوب دیگری لخت است.

اگر لخت نبودن یك چارچوب مرجع، برای گروهی از پدیده‌های مورد بررسی درون‌آن محسوس نباشد، می‌توان‌آن را چارچوب مرجع‌لخت به‌حساب آورد. مثلاً وقتی سخن از چارچوب مرجع وابسته به‌زمین باشد و یا وابسته به‌قطاری‌که به‌طور یکنواخت وراست خط روی سطح آن حرکت می‌کند، معمولاً آن را چارچوب مرجع لخت به‌حساب می‌آورند. به‌این‌ترتیب، چارچوب مرجع لخت، یکی از نخستین و مهم‌ترین انتزاع‌ها در فیزیك است.

۳۰۱. بنابرمکانیك کلاسیك نیوتونی، یك چارچوب مرجع‌لخت اصلی وجود داردکه آن را چارچوب مرجع مطلق می‌نامند ودارای ویژگی‌های اساسی زیر است:

۱) چارچوب مرجع مطلق، نه به‌جسم واقعی، بلکه به‌فضای کیهانی

وابسته است؛

۲) چارچوب مرجع مطلق، بنابه‌شرط، ساکن است؛

۳) فضای چارچوب مرجع مطلق، فضایی است اقلیدسی، سه بعدی، پیوسته، همبند ساده، همگن، همسانگرد (ایزوتروپیك)، همراه با زمانی همگن، یك بعدی، پیوسته ویك سویه[1]؛

۴) در چارچوب مرجع لخت، قانون‌های اساسی حرکت ــ قانون‌های نیوتونی ــ صدق می‌کنند.

بعد از وارد شدن مفهوم چارچوب لخت مطلق، همهٔ چارچوب‌های مرجع، به‌کمك اصل زیر، گروه‌بندی می‌شوند: هر چارچوب مرجعی که، نسبت به‌چارچوب مرجع مطلق، به‌طور یکنواخت و روی خط راست حرکت کند (ویا ساکن باشد)، بازهم یك چارچوب مرجع لخت است و، از نظر مکانیکی، به‌طور کامل با اولی هم‌ارز است. چارچوب مرجعی که، نسبت به‌چارچوب مرجع مطلق، شتاب داشته باشد، یك چارچوب مرجع نالخت است.

از این اصل، که به‌**اصل نسبیت گالیله** معروف است، نتیجه می‌شود: همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، در رابطه‌های مکانیکی هم‌ارزند. واین به‌معنای آن است که، اولاً ویژگی‌های عمومی فضا وزمان در هرچارچوب مرجع لختی که به‌طور مجزا اختیار شده باشند، کاملا یکسان‌اند ــ اقلیدسی بودن فضا (سه‌بعدی بودن، پیوستگی، همبندی ساده، همگنی وهمسانگردی) و همگن بودن زمان (یك‌بعدی بودن، پیوستگی ویك سویه بودن)؛ ثانیاً پدیده‌های مکانیکی در همهٔ چارچوب‌های مرجع مطلق، از قانون یکسانی در دینامیك پیروی می‌کنند.

درحالت خاص، اگر دوچارچوب مرجع لخت (K و K') با سرعت نسبی $\vec{v}=\text{const}$ مفروض باشند، از نظر مکانیکی، ارزشی کاملا یکسان دارند؛ هریك ازآن‌ها را می‌توان، طبق فرض، ساکن به‌حساب آورد (موقعیت‌های شکل ۱ــa وشکل ۱ــb هم‌ارزند). بنابراین، اگردر هریك ازچارچوب‌های

---

۱. ضمن حل مسألهٔ ۴۰۱، مضمون این مفهوم‌ها روشن خواهد شد.

مرجع لخت (آزمایشگاه‌های K و K')، آزمایش‌های مکانیکی یکسانی انجام گیرد، نتیجه‌های کاملا یکسانی به‌دست خواهد آمد. بنابراین، از روی نتیجه‌هایی که ناشی از آزمایش‌هایی در درون یك چارچوب مرجع لخت باشد، نمی‌توان به‌صورت یك ارزشی، به‌حقیقت مربوط به‌حرکت یا سکون دستگاه (نسبت به‌هرچارچوب مرجع لخت دیگر) پی برد.

۴۰۱. الف) سه‌بعدی بودن، پیوستگی و همبندی ساده در فضا، به‌ویژگی‌های توپولوژیکی آن مربوط می‌شود (ویژگی‌هایی که ماهیت کامل و کیفی یك موضوع هندسی را، بدون توجه به‌جنبهٔ کمیتی آن، بیان می‌کند). توپولوژی فضا، در ویژگی‌های مربوط به‌جای گزینی عنصرهای آن، که با هر تبدیل پیوستهٔ فضا (هر تغییر شکل آن) حفظ می‌شوند (یعنی تغییر نمی‌کنند)، تظاهر می‌کند.

ویژگی‌های متریك فضا، معرف ماهیت کمیتی آن هستند. ازجملهٔ این ویژگی‌ها می‌توان متریك (که مفهوم فاصله را بیان می‌کند)، خمیدگی، همگنی وهمسانگردی را برشمرد.

سه‌بعدی بودن فضا (از دیدگاه متریك) به‌این معناست که هر نقطهٔ آن را می‌توان به‌کمك سه پارامتر معین کرد (مثلا، به‌کمك مختصات دکارتی آن، x و y و z، در فضای اقلیدسی).

مفهوم یکنواختی (از دیدگاه توپولوژی) به‌این ترتیب تعریف می‌شود: ۱) مجموعهٔ تهی، دارای یکنواختی ۱ است؛ ۲) اندازه یا بُعدیت فضا عبارت است از کوچکترین عدد درست n، به‌نحوی که هر نقطهٔ فضا، دارای همسایگی‌های به دلخواه کوچك باشد که، مرزهای آن‌ها، بُعدیتی کمتر از n داشته باشند.

با توجه به‌این تعریف، بعدیت برای نقطه برابر ۰، برای خط راست برابر ۱، برای صفحه برابر ۲ وبرای حجم (یا جسم) برابر ۳ است. در توپولوژی، این قضیه ثابت می‌شود: فضای n بعدی اقلیدسی (به‌مفهوم متریك) دارای بعدیت یا اندازه‌ای برابر n است. بنابراین، در فضای اقلیدسی، خط (راست یا منحنی یا شکسته)، بعدیتی برابر ۱، سطح بعدیتی

برابر ۲ وفضای سه‌بعدی اقلیدسی (به‌مفهوم متریك) بعدیتی برابر ۳ دارد.

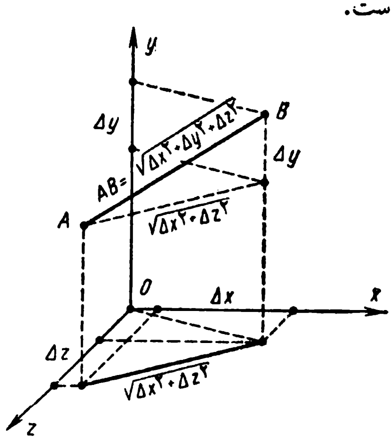
پیوستگی فضا (به‌مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ها) به‌این معنی است که، مجموعهٔ نقطه‌های آن، دارای توان متصله است، یعنی با مجموعهٔ عددهای حقیقی هم‌ارز است (به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ نقطه‌های فضا، مجموعه‌ای ناشمارا است).

مفهوم فضای همبند (یا مرتبط)، دقیقاً به‌مفهوم پیوستگی مربوط می‌شود. فضا را وقتی همبند گویند که بتوان آن را به دوبخش چنان تقسیم کرد که یکی از آن‌ها، شامل عنصرهایی بی‌نهایت نزدیك به‌دیگری باشد. اگر در فضا، هردورهٔ بسته‌ای را بتوان، با تبدیل‌های پیوسته، به‌نقطه تغییر شکل داد، آن‌گاه، فضای مفروض را همبند ساده گویند (مثلا ، فضای دو بعدی صفحهٔ اقلیدسی، برخلاف فضای دوبعدی سطح چنبره‌ای، یك فضای همبند ساده است).

معیار اقلیدسی‌بودن فضا ، عبارت است از امکان ساختن دستگاه مختصات قائم دکارتی درآن، وبیان مجذورفاصلهٔ بین دونقطه ازآن به‌صورت

$$s^{2}=\Delta x^{2}+\Delta y^{2}+\Delta z^{2} \qquad (1)$$

که در آن، Δx ، Δy و Δz عبارتند از تصویرهای پاره‌خط s بر محورهای متناظر مختصات. همان‌طور که در شکل ۱۷ دیده می‌شود، رابطهٔ (۱) معرف قضیهٔ فیثاغورث است.



شکل ۱۷

همگنی (یا متجانس بودن) فضا به‌معنای «برابرحقوقی» همهٔ نقطه‌های آن (به نحوی که هیچ نقطه‌ای ویژگی یا امتیاز خاصی نسبت به نقطه‌های دیگر نداشته باشد) و همسانگردی (یا ویژگی ایزوتروپیك) ، یعنی «برابر حقوقی» همهٔ امتدادهای آن است.

همگنی و همسانگردی فضا، به ترتیب، به این صورت تظاهر می‌کنند که‌انتقال چارچوب‌مرجع‌مطلق به‌موازات خود ودوران‌آن به‌اندازهٔزاویه‌ای دلخواه، موجب تغییر ویژگی‌های فیزیکی پدیده‌ها نمی‌شود.

ب) مفهوم‌های یك‌بعدی بودن، پیوستگی و یك سویه بودن، به‌ویژگی‌های توپولوژیکی زمان، وهمگنی به‌ویژگی‌های متریك آن مربوط می‌شود.

یك بعدی‌بودن زمان به این معناست که، هرلحظه از زمان، تنها با یك پارامتر معین می‌شود و، بنابراین، هرمجموعه‌ای از رویدادها را، که در یك نقطهٔ‌فضا اتفاق‌می‌افتند، می‌توان‌با دنباله‌ای خطی‌ازاین پارامتر، شماره گذاری کرد. در حالت یك بعدی بودن زمان، هرفرایند پیوسته‌ای، عبارت است از دنباله‌ای خطی از رویدادها.

قضیه‌ای که در بالا از توپولوژی آوردیم، امکان می‌دهد تا بی‌تناقضی تعریف‌یك‌بعدی‌بودن زمان (به‌مفهوم متریك) را، باتنظیم دقیق‌تر مفهوم‌بعدیت (از دیدگاه توپولوژی) روشن‌کنیم.

پیوستگی‌زمان، به‌معنای آن است که مجموعهٔ‌لحظه‌ها،دارای‌توان‌متصله است(یعنی‌مجموعهٔ‌پارامترهایی که‌لحظه‌های‌زمان را معین می‌کنند، با مجموعهٔ عددهای حقیقی هم‌ارز است).

یك سویه بودن زمان، به معنای آن است که، در مورد دوجهت متقابل جریان زمان، تنها یکی از آن‌ها وجود دارد، یعنی زمان برگشت‌ناپذیر است.

همگنی زمان به‌این معناست که، همهٔ لحظه‌های زمان، ارزشی برابر دارند و هرکدام از آن‌ها را می‌توان به‌عنوان مبداء اختیار کرد.

۵۰۱. چارچوب‌های مرجع لخت K و K' را با سرعت نسبی $\vec{v}=\text{const}$ در نظرمی‌گیریم (شکل ۱ را ببینید). فرض‌کنید در چارچوب مرجع لخت K' ، سیگنالی با مشخصهٔ $u'=\infty$ وجود داشته باشد ($\vec{u'} \parallel \vec{v}$).

بنا بر قانون کلاسیك تبدیل سرعت (یا به بیانی با دقت کمتر: قانون «جمع»)، سرعت سیگنال مفروض، در چارچوب مرجع لخت K، برابر است با

$$u=u'+v=\infty+v=\infty\Rightarrow u=u'$$

کمیتی که برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت یکسان باشد، تغییرناپذیـر (یا مقداری «ناوردا») نـامیده و با inv (انـوواریان) نشان داده می‌شود[1]. بنا براین، سرعت بی‌نهایت، برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت «ناوردا» است، یعنی $u=\infty=\mathrm{inv}$. بـرعکس، اگـر بـدانیم $u=\mathrm{inv}$، آن‌گاه ، از $u=u'+v$ وشرط $u=u'$ به‌ازای مقدارمتناهی v ، معلوم می‌شود که ناوردا- بودن u، تنها وقتی ممکن است که داشته‌باشیم: $u=u'=\infty$، یعنی ناوردایی سرعت درفیزیك کلاسیك، سرعت بی‌نهایت است: $u=\mathrm{inv}=\infty$.

۶۰۱. هرعلم مربوط به‌طبیعت (واز آن جمله، فیزیك) باید بـراساس یك دستگاه اصل موضوعی استوار باشد. اصل موضوع‌ها (یا بـه‌طـور ساده، اصل‌ها)، ابتدایی‌ترین حکم‌هایی هستند که تجربهٔ آدمی، آن‌ها را تأیید کرده است. ازآن‌جاکه حوزهٔ کار فیزیك عبارت است ازمطالعهٔ ویژگی شکل‌های مختلف حرکت ماده، همراه با شکل‌های وجودی آن درفضا و زمان، بنابراین علم فیزیك، قبل از هرچیز، برپایهٔ اصل موضوع‌هایی استوار است که معرف ویژگی‌های عمومی فضا، زمان، ماده و حرکت آن باشند.

تجزیه و تحلیل فیزیك کلاسیك (از دیدگاه امروزی) نشان می‌دهد که شالودهٔ آن، اصل موضوع‌های زیر است:

۱. اصل نسبیت گالیله.

۲. تأیید امکان اصولی سرعت مطلق بی‌نهـایت بـرای هر چارچوب مرجع لخت (که به‌صورت $c=\mathrm{inv}=\infty$ نوشته می‌شود).

۳. فرض مربوط به نامتناهی بودن سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت: $v<\infty$.

۴. فرض مربوط به‌اقلیدسی بودن، سه بعدی بودن، پیوستگی، همبندی

---

[1]. inv ، حرف‌های اول واژهٔ invariant ، به معنای تغییرناپذیـر و ناوردا است.

ساده، همگنی وهمسانگردی فضا در چارچوب مرجع مطلق.

۵. اصل مربوط به همگنی، تك بعدی، پیوستگی و یك سویی زمان در چارچوب مرجع لخت.

دواصل موضوع اول، همراه با شرط $v<\infty$، به‌ویژگی‌های عمومی ماده، و اصل‌های چهارم وپنجم، به‌ویژگی‌های عمومی فضا و زمان مربـوط می‌شوند.

اصل نسبیت گالیله، بـرای فیزیك عمومی کافی نیست. محدودیت آن ناشی از جهان بینی غیـرعلمی (متافیزیکی) دانشمندان سده‌هـای هفدهم تا نوزدهم است کـه گمان می‌کردند، هـرپدیدهٔ فیزیکی را، باید تنها به‌کمك قانون‌های مکانیك (یعنی از طریق یك مدل مکانیکی) توضیح داد. فیلسوفانی که جهان‌بینی علمی دارند، به حق، این‌گونه برخورد با ساختمان نظریه‌های مربوط به‌پدیده‌های فیزیکی را رد می‌کنند: مطالعهٔ شکل‌های مختلف حرکت ماده درفیزیك، که ازنظرماهیت وپیچیدگی خود باهم فرق دارند، نمی‌تواند تنها به‌یك حالت ساده (یعنی حرکت مکانیکی) منجر شود.

اصل $c=\mathrm{inv}=\infty$، به معنای آن است کـه امکان اصولی سرعت ناوردای نامتناهی را، درهمهٔ چارچوب‌های مرجع لخت بپذیریم. این‌سرعت اولاً برای فیزیك کلاسیك، به‌قصد ساختن‌چارچوب‌مرجع (هم‌زمانی‌ساعتها؛ ۱۰۱ را ببینید) ضرورت دارد. ثانیاً، قانون کلاسیك«جمع»سرعت‌ها(۵۰۱ را ببینید)، مستقیماً با این اصل تطبیق می‌کند. سوم آن‌که، بنابرقانون دوم‌مکانیك نیوتـونی، به‌ازای $\vec{F}=\mathrm{const}$، به دست می‌آید: $v=v_0+at$، که از آن‌جا نتیجه‌می‌شود: اگر $t\to\infty$، آن‌گاه $v\to\infty$، یعنی با واردآمدن نیروی $\vec{F}=\mathrm{const}$، می‌توان نقطهٔ مادی را به طور نامحـدود شتاب داد؛ در ضمن $c=\infty$، به این مفهوم، «مقدار حدی» است‌که به‌ازای $t=\infty$ به‌دست می‌آید. سرانجام قانون سوم نیوتـون به صورت $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$ (که درآن، F_{12} نیروی وارد ازنقطهٔ مادی دوم براولی، و F_{21} نیروی‌وارد از اولی بردومی است) باید در هرلحظه صادق باشد، حتی اگر نقطه‌هایی‌که برهم‌کنش دارند در فاصله‌ای دلخواه، دور از یکدیگر قرارگـرفته باشند.

ولی در این صورت ، کنش یك نقطهٔ مادی بـر نقطهٔ مادی دیگـر، فوری و و لحظه‌ای است (یعنی بـا سرعت $c=\infty$): تغییر موضع یکی از آن‌هـا، بلافاصله و از طریق کمیت‌های $\overrightarrow{F}_{۱۲}$ و $\overrightarrow{F}_{۲۱}$ بیان می‌شود؛ درضمن، این تغییر موضع به‌نحوی است که دوباره رابطهٔ $\overrightarrow{F}_{۱۲}+\overrightarrow{F}_{۲۱}=0$ برقرار باشد.

به این ترتیب، در فیـزیك كلاسیك؛ امکان اصولی $c=\text{inv}=\infty$ وجود دارد؛ در ضمن، ماهیت فیـزیکی سرعت لحظـه‌ای، نه در خود اصل موضوع، بلکه به عنوان یك کمیت اصلی عام، مشخص می‌شود.

ویژگی‌های عمومی فضا و زمان (که در اصل موضوع‌هـای چهارم و پنجم، از آن‌ها سخن رفت)، در همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، اگـر هر کدام را به طور جداگانه مورد بحث قـراردهیم ، کاملاً یکسان است. این ویژگی‌ها را می‌توان تغییرناپذیر (یا مطلق) نامید، یعنی به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت مشخصی بستگی ندارد ومستقل ازآن است.

اگر از اصطلاح‌های اینشتین استفاده کنیم، یعنی از موضع نظریهٔ نسبیت خاص و فیزیك نسبیتی صحبت کنیم، آن وقت، اصل موضوع‌هـای نامبرده ، اساس «نظریهٔ نسبیت کلاسیك» را تشکیل می‌دهند. این اصطلاح را، بـه این دلیل در داخل گیومه گذاشته‌ایم که، از نظرتاریخی، درفیزیك كلاسيك وجود نداشته است.

نظریهٔ نسبیت کلاسیك، به عنوان مجموعه‌ای از اصل‌های عام، شالودهٔ مکانیك كلاسیك و،ازطریق آن،شالودهٔ‌تمامی فیزیك كلاسیك‌را تشکیل می‌دهند.

۰۷۰۱ رویداد عبارت است از یك فرایند فیزیکی (یا کنش فیزیکی) متناهی در فضا و زمان، با ماهیت فیزیکی دلخواه. بنابراین، رویداد تنها با مکانی کـه در آن اتفاق افتاده است و زمان اتفاق تعیین می‌شود، یعنی دارای چهار «مختص» (x, y, z, t) است. این تعریف برای رویداد، تعریفی کاملاً انتزاعی است، زیرا از همهٔ ویژگی‌های گوناگون یك رویداد مشخص، جز خصلت فضا ـ زمانی آن، جدا شده است. ولی این شیوهٔ بـرخورد انتزاعی، بی‌اندازه ثمربخش است، زیرا گزاره‌ها وقانون‌هایی راکه برای رویدادهای انتزاعی به‌دست‌می‌آید، می‌توان دربارهٔ رویدادهایی با سرشت‌های گوناگون

به‌کار برد.

مهم‌ترین ویژگی رویداد، مطلق بودن آن است: اگر رویدادی در یك چارچوب مرجع اتفاق افتاده باشد، بی‌تردید در هرچارچوب مرجع دیگری هم اتفاق می‌افتد. این اصل مطلق بودن رویدادها را، درحل مسأله‌ها، بسیار به‌کار خواهیم برد (چه در نظریهٔ کلاسیك وچه در نظریهٔ نسبیت خاص).

۰۸۰۱ در فیزیك کلاسیك می‌توان، به طور صوری، جهان رویدادها را، به‌صورت *نقطه‌های* چهار بعدی (x, y, z, t) نشان داد. ولی این امر، هیچ فایده‌ای را به دنبال ندارد، زیرا این بیان صوری نقطه‌های چهار بعدی، از دیدگاه هندسی، نمایانگر یك فضای متریك نیست. فضای متریك وقتی به‌وجود می‌آید که بتوانیم فاصلهٔ بین نقطه‌های نزدیك به‌هم را تعریف کنیم. مثلاً متریك (یا فاصلهٔ) فضای سه بعدی اقلیدسی، در دستگاه قائم مختصات دکارتی با رابطهٔ

$$s^{۲} = \Delta x^{۲} + \Delta y^{۲} + \Delta z^{۲}$$

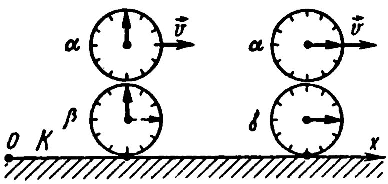
بیان‌می‌شود (**۴۰۱** را ببینید). ولی‌برای‌شکل‌های‌مختلف چهار بعدی‌رویدادها، نمی‌توان در فیزیك کلاسیك، رابطهٔ مشابهی پیدا کرد. فضای سه بعدی اقلیدسی (چارچوب مرجع لخت) و زمان را، *نمی‌توان* در یك فضای چهار بعدی، به‌هم مربوط کرد.

۰۹۰۱ فرض کنیم، درچارچوب مرجع لخت K'، دو رویداد A' و B' در نقطه‌هایی به‌فاصلهٔ l' از یکدیگر، به‌طور هم زمان اتفاق افتاده باشد، آیا این رویدادها در چارچوب مرجع مطلق K، هم زمان‌اند؟

برای چارچوب مرجع لخت K' می‌توان نوشت: $\dfrac{l'}{\Delta t'} = c' = \infty$

(زیرا $\Delta t' = ۰$)،وبرای چارچوب مرجع لخت K: $\dfrac{l}{\Delta t} = c = \infty$ (بنابر اصل موضوع دوم نظریهٔ نسبیت‌کلاسیك داریم: $c = \text{inv} = \infty$). از این‌جا نتیجه می‌شود: $\Delta t = ۰$ ، یعنی هم زمانی رویدادها در نظریهٔ نسبیت‌کلاسیك، مطلق است: رویدادهایی‌که در یك چارچوب مرجع لخت هم زمان باشند، در هرچارچوب مرجع لخت دیگری هم، هم زمان‌اند.

۱۰.۵۰ مطلق‌بودن هم‌زمانی رویداد در نظریهٔ نسبیت کلاسیك، دارای معنایی عمیق است که به این ترتیب قابل توضیح است. همان طور که قبلاً هم یادآوری کردیم، به کمك سیگنال $c=\infty$ ، همهٔ ساعت‌های چارچوب مرجع لخت مفروض، زمان مشابهی را نشان‌می‌دهند (هم‌زمان شده‌اند) و، از همین جا، مفهوم زمان در یك چارچوب مرجع تحقق می‌یابد. ولی چون $c=\infty=\mathrm{inv}$، بنابراین‌سیگنال $c=\infty$، همهٔ‌ساعت‌ها را درهمهٔ‌چارچوب‌های مرجع لخت، هم زمان می‌کند که منجر به زمان عام واحد برای آن‌ها می‌شود.



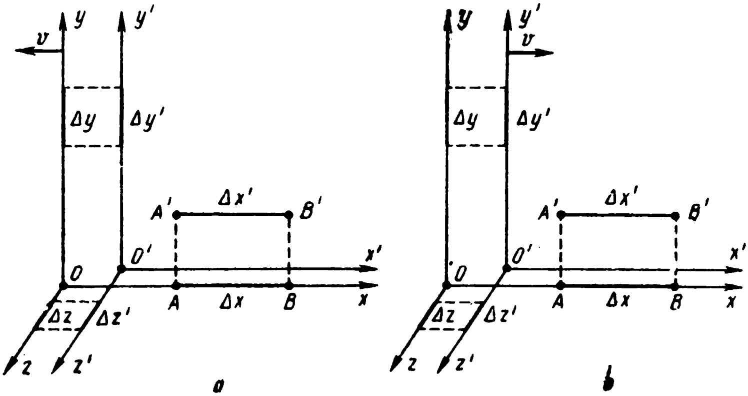
شکل ۱۸

درحالت‌خاص، اگرساعت متحرك α و دوساعت ساکن β و γ مفروض باشند (در چارچوب مرجع لخت K)، آن گاه ساعت α، که همان زمان ساعت β را (در انطباق فضایی دو ساعت) نشان می‌دهد، همان زمان ساعت γ را (ضمن رسیدن به‌آن) نشان خواهد داد (شکل ۱۸).

۱۰.۱۱ اگر پاره خط $\Delta x'(\Delta y'$ ، $\Delta z')$ در چارچوب مرجع لخت K' ، نسبت به چارچوب مرجع لخت K قرار داشته باشد (شکل ۱۹–a)، آن وقت پرسش مربوط به مفهوم طول پاره خط متحرك پیش می‌آید. دراین جا در واقع، باید تعریفی داشته باشیم، زیرا بدون چنین تعریفی، صحبت از طول پاره خط واندازهٔ آن معنا ندارد.

با تکیه به‌تجربهٔ روزانه می‌توان گفت: وقتی بایك شیء سروکار داشته باشیم، خودبه‌خودیك مجموعهٔ کامل را همراه با جزءهای گوناگون آن در نظر داریم. بنابراین، به طور طبیعی، این تعریف را خواهیم داشت: طول یك پاره‌خط به‌فاصلهٔ بین دو انتهای آن، درموضع‌های هم‌زمان آن‌ها می‌گویند

که در چارچوب مرجع مفروض بامقیاسی ساکن اندازه‌گیری شود. این‌تعریف هم برای حالت پاره خط ساکن و هم برای حالت پاره خط متحرك ، درست است.



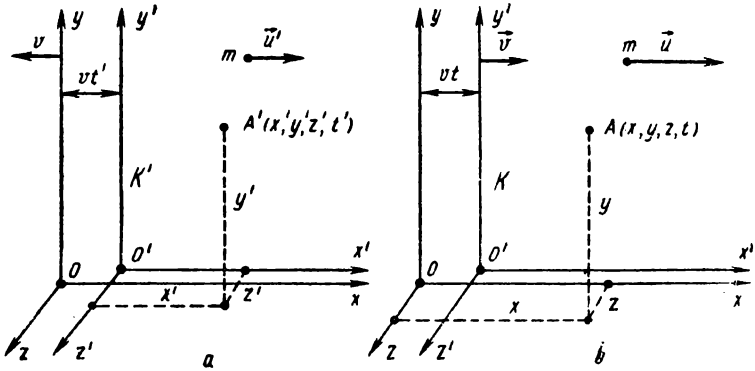
شکل ۱۹

به این ترتیب، دو انتهای پاره خط $\Delta x'$ (و همچنین، پاره خط‌هـای $\Delta y'$ و $\Delta z'$) در چارچوب مـرجع لخت K با سرعت v حرکت می‌کنند و در نتیجهٔ آن، پاره خط Δx (همچنین Δy و Δz) به دست می‌آید. پاره خط Δx(Δy ، Δz) نسبت به چارچوب مـرجع لخت K' ، پاره خطی جابه‌جا شده است (شکل ۱۹–b). رویدادهای مربوط به دو انتهای پاره‌خط، که در چارچوب مرجع لخت K هم‌زمان‌اند (بنا برمطلق بودن هم‌زمانی رویدادها)، همان رویدادهایی هستندکه در چارچوب مرجع لخت K' اتفاق افتاده‌انـد و ، بنابراین، $|\Delta x|=|\Delta x'|$،$|\Delta y|=|\Delta y'|$ و $|\Delta z|=|\Delta z'|$ ، که بهتر است به این صورت نوشته شوند: $|\Delta x|_k=|\Delta x'|_k$ ، $|\Delta x|_{k'}=|Ax'|_{k'}$ (و به‌همین ترتیب، برای $|\Delta y|$ و $|\Delta z|$). نماد $|\Delta x'|_k$ به معنای طول پاره‌خط $\Delta x'$ در چارچوب مرجع لخت K (متحـرك) است . اگر قرار بگـذاریم: $|\Delta x'|_k=l$ و $|\Delta x|_{k'}=l_0$ ، به دست می‌آید: $l=l_0$ (در این‌جا l_0، طول پاره خط درچارچوب مرجعی است که پاره خط در آن ساکن است؛ l، طول همان پاره‌خط در چارچوب مرجعی است که نسبت به‌آن در حرکت است).

به این ترتیب، در نظریهٔ نسبیت کلاسیک، داریم:

$$l = \mathrm{inv} \qquad (1)$$

۱۲۰۱. فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K' (شکل ۲۰–a)، رویدادی مثل $A'(x', y', z', t')$ اتفاق افتاده باشد. این رویداد در چارچوب مرجع لخت K به رویداد $A(x, y, z, t)$ تبدیل می‌شود.



شکل ۲۰

این پرسش پیش می‌آید: رابطهٔ بین کمیت‌های (x', y', z', t') و (x, y, z, t) چگونه است؟

اولاً $t' = t$، زیرا به اتکای سیگنال اصلی $c = \infty = \mathrm{inv}$، یک زمان عام واحد برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت وجود دارد (۱۰۰۱ را ببینید.)

ثانیاً، ضمن حل مسألهٔ ۱۱۰۱ به دست آوردیم: $y' = y$ ، $z' = z$.

بالاخره با فرض $t = t' = 0$ ، نقطه‌های O و O' برهم منطبق می‌شوند و با توجه به این که $l = \mathrm{inv}$ (۱۱۰۱ را ببینید)، خواهیم داشت: $x = x' + vt$ یا $x = x' + vt'$ (چون $t = t'$) (شکل ۲۰–b را ببینید).

به این ترتیب، قانون تبدیل مختصات رویداد، در نظریهٔ نسبیت کلاسیک، چنین است:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \qquad (1)$$

یا

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \qquad (2)$$

دستورهای (۱) و(۲)، تبدیل‌های گالیله نامیده می‌شوند (که‌متناظرند با تبدیل مستقیم و معکوس، یعنی برای عبور از K به K' و از K' به K).

۱۳۰۱. به چه مناسبت، باید عبور از یك چارچوب مرجع لخت بـه چارچوبی دیگر را مورد مطالعه قرار داد و قانون‌های تبدیل مختصات فضا ـ زمـان را وهمچنین، قانون‌های تبدیل کمیت‌های فیزیکی را ـ که به صورت تابع‌هایی از (x,y,z,t) هستند ـ پیدا کرد؟

البته، برای فیزیك‌دانی که با چارچوب‌هـای مرجع گوناگونی کار می‌کند، مطالعهٔ قانون‌های تبدیل، به این جهت لازم است که «واژگانی» در اختیار داشته باشد تا بتواند، به کمك آن، نتیجهٔ محاسبه‌های خود را از یك چارچوب مرجع لخت، به دیگری منتقل کند، ولی این، دلیل عمده نیست.

وقتی که مجموعهٔ چارچوب‌های مرجع لخت را در نظر بگیریم، قبل از همه‌می‌خواهیم ویژگی‌های بنیانی‌فیزیکی پدیده‌ها را (وهمچنین، ویژگی‌های فضا وزمان را) دریك چارچوب مرجع لخت پیدا کنیم. این‌ویژگی‌ها درست همان‌هایی هستند که‌برای همهٔ چارچوب‌های مرجع‌لخت یکسان‌اند(وارتباطی به‌انتخاب یك‌نوع مشخص چارچوب‌مرجع لخت ندارند)،یعنی ویژگی‌هایی مطلق به‌حساب می‌آیند. به‌خصوص‌همین ویژگی‌ها هستند که ماهیت‌خود‌پدیده را، بدون ارتباط باچارچوبی‌که ما را به‌آن‌ها می‌رسانند،مشخص می‌کنند.

بنابراین، آن‌کمیت‌ها و رابطه‌های فیزیکی که در هرتبدیل گالیله‌حفظ می‌شوند و بی تغییر می‌مانند، برای هـر چارچوب مرجع لخت، فوق‌العاده اساسی‌اند. به این ترتیب، تبدیل‌های گالیله به عنوان روش پرداختن نظریهٔ پدیده‌های فیزیکی، براساس اصل‌هـای کلاسیك عمل می‌کنند: قانـون‌های فیزیك‌کلاسیك، آن‌هایی هستند که نسبت به‌این تبدیل‌ها، مطلق می‌مانند (یعنی شکل ریاضی خود را در کمیت‌های فیزیکی، تابع آوندهـای x، y، z و t، بنابر دستورهای (۱) یا (۲) از ۱۲۰۱، تغییر نمی‌دهند).

در عین‌حال، از آن‌جاکه تبدیل‌های گالیله، مضمون اصل‌موضوع‌های نظریهٔ کلاسیك نسبیت را با زبان ریاضی بیان می‌کنند، از طریق مطلق‌بودن قانون‌های فیزیکی نسبت به‌تبدیل‌های گالیلـه، نظام فیزیك عمومی بـرای توصیف پدیده‌های فیزیکی مشخص تحقق می‌یابد. می‌توان گفت که، ارتباط

متقابل فضا و زمان، درسطح نظامی مطلق، یعنی شکل موجود ماده همـــراه با شکل حرکت آن، برقرار می‌شود.

۱۴۰۱. تبدیل‌های گالیله (۱۲۰۱ را ببینید)، ویژگی‌های فضا و زمان را، ضمن مقایسهٔ مستقیم دو چارچوب مرجع لخت، بیان می‌کنند:

۱) اگر درچارچوب مرجع لخت K'، دو رویداد هم زمان وهم مکان $A'(x', y', z', t')$ و $B'(x', y', z', t')$ مفروض باشند، یعنی‌داشته‌باشیم: $\Delta x' = \circ$ ، $\Delta y' = \circ$ ، $\Delta z' = \circ$ و $\Delta t' = \circ$؛ آن گاه رویدادهای مفروض در چارچوب مرجع لخت K هم، هم زمان و هم مکان خواهند بود: $\Delta x = \circ$ ، $\Delta y = \circ$ ، $\Delta z = \circ$ و $\Delta t = \circ$.

۲) اگـــر در چارچوب مـــرجع لخت K' ، دو رویـــداد هم زمـــان $A'(x'_1, y'_1, z'_1, t')$ و $B'(x'_2, y'_2, z'_2, t')$ در دومکان مختلف اتفاق افتاده باشد، یعنی‌داشته‌باشیم: $\Delta x' = x'_2 - x'_1$، $\Delta y' = y'_2 - y'_1$، $\Delta z' = z'_2 - z'_1$ و $\Delta t' = \circ$، آن وقت این رویدادها درچارچوب مرجع لخت Kهم، به‌طور هم‌زمان و در دو مکان مختلف اتفاق خواهند افتاد: $\Delta t = \circ$ ، $\Delta x = \Delta x'$ ، $\Delta y = \Delta y'$ و $\Delta z = \Delta z'$.

۳) اگر درچارچوب‌مرجع‌لخت K' ، دو رویداد $A'(x', y', z', t'_1)$ و $B'(x' y', z', t'_2)$، دریك‌مکان وددرزمان‌های مختلف اتفاق‌افتاده‌باشد، یعنی اگر داشته‌باشیم: $\Delta x' = \circ$، $\Delta y' = \circ$، $\Delta z' = \circ$ و $\Delta t' = t'_2 - t'_1$، آن‌وقت‌در چارچوب‌مرجع لخت Kهم، در یك مکان وددرزمان‌های مختلف‌اتفاق می‌افتند:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -v\Delta t', \ \Delta y = \Delta y' = \circ, \ \Delta z = \Delta z' = \circ,$$
$$\Delta t = \Delta t' \neq \circ$$

۴) اگر درچارچوب‌مرجع‌لخت K'، دو رویداد درزمان‌های‌مختلف و مکان‌های‌مختلف‌اتفاق‌افتاده‌باشند، یعنی‌اگرداشته‌باشیم: $\Delta x' \neq \circ$، $\Delta y' \neq \circ$، $\Delta z' \neq \circ$ و $\Delta t' \neq \circ$ ، آن گاه‌درچارچوب‌مرجع‌لخت K هم، خواهیم‌داشت: $\Delta x \neq \circ$ ، $\Delta y \neq \circ$ ، $\Delta z \neq \circ$ و $\Delta t \neq \circ$.

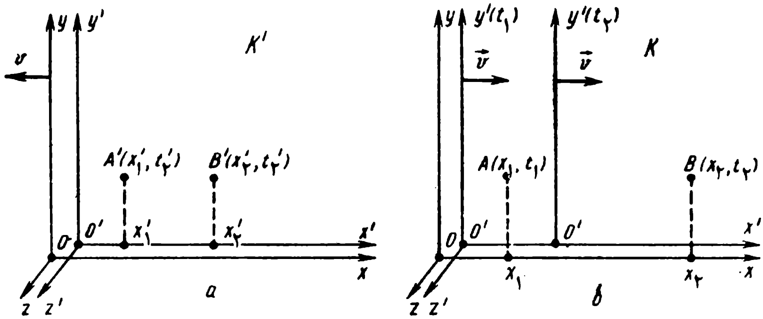
۱۵۰۱. فـــرض‌کنید در چارچوب مـــرجع لخت K'، در نقطه‌هایی به مختصات x'_1 و x'_2 $(x'_2 > x'_1 > \circ)$ (شکل ۲۱) ، دو رویداد در لحظه‌های $t'_1, t'_2 (t'_2 > t'_1)$ به وقوع پیوسته باشد. می‌دانیم، رویداد دوم، نتیجه‌ای‌است

ازرویداداول. وضع این رویدادها درچارچوب مرجع لخت دوم چگونه است؟

از تبدیل گالیله به دست می‌آید: $x_1 = x'_1 + vt'_1$ ، $x_2 = x'_2 + vt'_2$ ، $t_1 = t'_1$ ، $t_2 = t'_2$. از این جا حاصل می‌شود:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1) \quad \text{و} \quad t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$$

یعنی $x_2 > x_1$ و $t_2 > t_1$. به این ترتیب، در چارچوب مرجع لخت K ، ترتیب رویدادها همان است که درچارچوب مرجع لخت K' بود ، یعنی ترتیب رویدادها تغییرناپذیر است.



شکل ۲۱

اگر در چارچوب مرجع لخت K' داشته باشیم:

$$(x'_2 > 0 ، x'_1 > 0) x'_2 < x'_1$$

و مثل حالت قبل $t'_2 > t'_1$ (روی شکل ۲۱ ، باید جای رویدادها را در نقطه‌های A' و B' عوض کرد) ، آن گاه در چارچوب مرجع لخت K (با به کاربردن تبدیل گالیله) به دست می‌آید: $t_2 > t_1$ و $x_2 \leqslant x_1$. علامت نابرابری اخیر را می‌توان چنین تفسیر کرد: $\frac{x'_1 - x'_2}{t'_2 - t'_1}$ را u' می‌نامیم ، دراین صورت

$$x_2 - x_1 = (t'_2 - t'_1)(v - u')$$

در این جا به ازای $u' < v$ داریم: $x_2 > x_1$ ، و به ازای $u' > v$ داریم: $x_2 < x_1$ ، یعنی ترتیب پیش آمدن رویدادها درحالت کلی، ناورداست.

۱۶۰۱. از تبدیل‌های گالیله می‌توان مستقیماً ، همهٔ نتیجه‌ها را درمورد ویژگی‌های ساعت و پاره خطهای فضایی متحرك به‌دست آورد.

فـرض کنیم درنقطهٔ $x' = 0$ (چارچـوب مرجع لخت K') ، ساعتی وجود داشته باشد که، برای انطباق نقطه‌های O و O'، زمان $t' = 0$ را نشان دهد ؛ در ضمن، ساعت نقطهٔ O (چارچـوب مرجع لخت K) نیز، $t = 0$ را مشخص کند. وقتی ساعت نقطهٔ O' زمان $\Delta t'$ را نشان دهد، ساعت نقطهٔ O ، زمان Δt را نشان خواهد داد و $\Delta t = \Delta t'$ (بنابر تبدیل گالیله). ساعت O' ، بعد از زمان حرکت Δt درچارچوب مرجع لخت K ، در موضع $x = v\Delta t$ قـرار می‌گیرد و، از نظر فضایی ، برساعتی از چـارچوب مرجع لخت K منطبق می‌شود و هردو زمانی یکسان را نشان می‌دهند: $\Delta t' = \Delta t$.

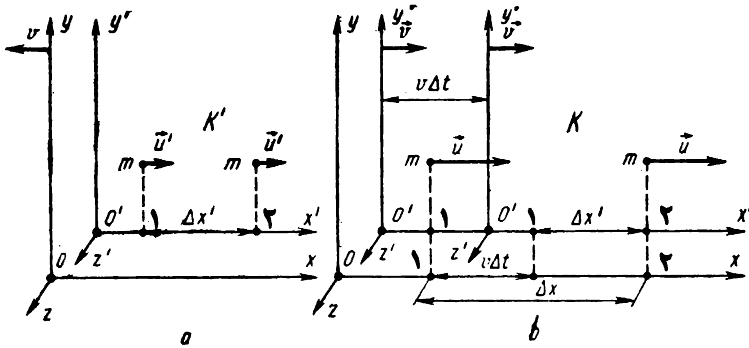
بنابرایـن، در نظـریهٔ نسبیت کلاسیك، زمانی کـه ساعت متحرك نشان می‌دهـد، با زمـان ساعت ساکـن (در چـارچوب مرجـع لخت مفروض) یکی است.

اکنون فرض کنید دو خط کش با طول‌های برابر l_0 (l_0 عبارت است از طول خط کش در چارچوب مرجعی کـه این خط کش نسبت به آن ساکن است)، نسبت به یکدیگر با سرعت $\vec{v} = \text{const}$ حرکت کنند. یکی از این طول‌هـای خطی را به چار چوب مرجع لخت K و دیگری را به چارچوب مرجع لخت K' مربوط می‌کنیم (شکل ۱۹ را ببینید).

اگر طول خط کش را، فاصلهٔ بین برش هم‌زمان دو انتهای آن تعریف کنیم، از تبدیل‌هـای گالیله به‌دست می‌آید : اگـر به ازای $\Delta t' = 0$ داشته باشیم: $l_0 = \Delta x'$، آنگاه به‌ازای $\Delta t = 0$ خواهیم‌داشت: $\Delta x = \Delta x' = l_0$، یعنی طول‌خط کش متحرك برابر است با طول خط کش ساکن ($l = \text{inv}$).

برای خط کش‌هایی کـه عمود برسرعت باشند، بلافاصله از تبدیل‌های گالیله به دست می‌آید: $\Delta y = \Delta y'$ ، $\Delta z = \Delta z'$ ، یعنی $l = \text{inv}$.

۱۷.۱. ذره‌ای در چارچوب مرجع لخت K' (شکل ۲۲) با سرعت u' حرکت می‌کند و در زمان $\Delta t'$ مسیر $\Delta x' = u'\Delta t'$ را می‌پیماید. سرعت این ذره نسبت به چارچـوب مـرجع لخت K ، مقدار نامعلوم $\vec{u}$ است. این ذره در زمـان $\Delta t = \Delta t'$ ، فاصلهٔ $\Delta x = \Delta x' + v\Delta t$ را طی می کند (شکل ۲۲-b) بنابراین



شکل ۲۲

$$u\Delta t = u'\Delta t' + v\Delta t \;\Rightarrow\; u = u' + v \qquad (۱)$$

اگر سرعت $\overrightarrow{u'}$ در خلاف جهت سرعت $\overrightarrow{v}$ باشد، آن‌گاه

$$u = u' - v \qquad (۲)$$

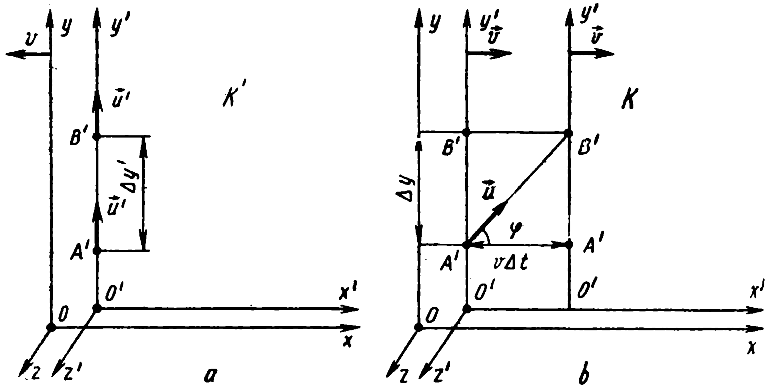
دستور (۱) [یا (۲)] ، معرف قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌هاست. به‌کمك این قانون می‌توان سرعت ذره را دریك چارچوب مرجع‌لخت پیدا کرد، به شرطی که سرعت آن در چارچوب مرجع لخت دیگر معلوم باشد. ضمن حل مسألهٔ ۵۰۱ ، مهم‌ترین ویژگی دستور (۲) را یادآوری کردیم: تنها وقتی داریم $u = u'$ ،که داشته باشیم: $u = \infty$ و $u' = \infty$.

۱۰۸۰۱. اگر داشته‌باشیم: $\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{v}$ (شکل۲۳–a)، آن‌گاه $\Delta y' = u'\Delta t'$ (برای چارچوب مرجع لخت K') و $(u\Delta t)^۲ = (v\Delta t)^۲ + (\Delta y)^۲$ برای چارچوب مرجع لخت K (شکل ۲۳–b). از آن جا ، با توجه به این که $\Delta y = \Delta y'$ و $\Delta t = \Delta t'$ ، به‌دست می‌آید: $u = \sqrt{u'^۲ + v^۲}$.

جهت بردار $\overrightarrow{u}$ با زاویهٔ φ معین می‌شود

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{v\Delta t} = \frac{u'}{v} \qquad [\varphi = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})]$$

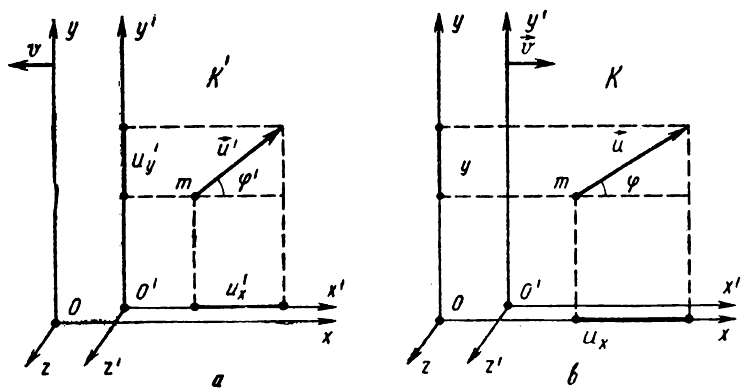
یادآوری می‌کنیم که ضمن رسم شکل ۲۳–b (یعنی طرح پدیده‌ها در چارچوب مرجع لخت K)، اصل ناوردابودن رویدادها را به حساب



شکل ۲۳

آورده‌ایم (۷۰۱ را ببینید) . رویداد ــ یعنی ورود ذره به‌نقطهٔ B' (جایی در چارچوب مرجع لخت K') ــ باید نسبت به چارچوب مرجع لخت K هم پیش آید. ولـی چون نقطهٔ B' درچـارچوب مرجع لخت K باسرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند، برای این‌که به‌آن برسد، باید سرعت ذره درجهتی‌که با $\vec{v}$ زاویهٔ φ می‌سازد، برابر $\vec{u}$ باشد.

۱۹۰۱. این مسأله را می‌توان با همان روش مسألهٔ ۱۸۰۱ حل کـرد، ولی ما برای حل آن، از تبدیل‌های گالیله استفاده می‌کنیم.



شکل ۲۴

u'_x و u'_y ، تصویرهای بردار سرعت $\overrightarrow{u'}$ رابر محورهای x و y ، پیدا می‌کنیم. روی شکل ۲۴-a دیده می‌شود که

$$u' = \sqrt{u_x'^{2} + u_y'^{2}} \qquad \text{و} \qquad \sin\varphi' = \frac{u'_y}{u'}$$

بنابراین $\Delta x' = u'_x \Delta t'$ ، $\Delta y' = u'_y \Delta t'$.

در چـارچوب مرجع لخت K (شکل ۲۴-b) ، براساس تبدیل‌های گالیله، داریم:

$$\Delta y = u_y \Delta t = u'_y \Delta t' \qquad \Delta x = u_x \Delta t = u'_x \Delta t' + v\Delta t',$$

که از آن جا به‌ازای $\Delta t = \Delta t'$ ، به‌دست می‌آید:

$$u_x = u'_x + v, \qquad u_y = u'_y \tag{۱}$$

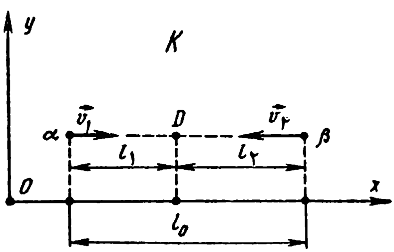
که عبارت است از قانون تبدیل مؤلفهٔ طولی و عرضی سرعت ذره در نظریهٔ نسبیت کلاسیك. از دستورهای (۱) نتیجه می‌شود:

$$u = \sqrt{u_x^{2} + u_y^{2}} = \sqrt{u_x'^{2} + v^{2} + 2u'_x v} \qquad \text{و} \qquad \sin\varphi = \frac{u_y}{u}$$

۲۰.۱. از قانـون کلاسیك تبدیل سرعت پی در پی استفاده می‌کنیم (دستور (۱) از ۱۷.۱) ، به دست می‌آید:

$$u = u_n + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n} v_i$$

۲۱.۱ فـرض کنید ذره‌های α و β ، در لحظهٔ t (با ساعت چارچوب مرجع لخت K) به فاصلهٔ l_0 از یکدیگر واقع باشند (شکل ۲۵). ذره‌ها در نقطهٔ D به هم می‌رسند.در ضمن یکی از آن‌هـا مسیر $l_1 = v_1 \Delta t$ و دیگری

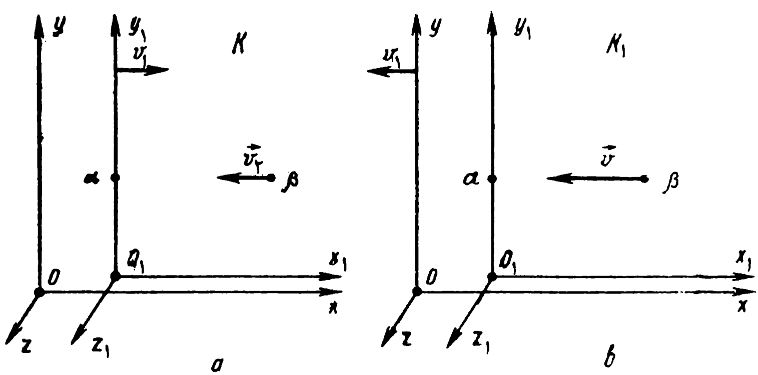


شکل ۲۵

مسیر $l_2=v_2\Delta t$ را می‌پیمایند. چون $l_0=l_1+l_2$ ، بنابراین

$$l_0=(v_1+v_2)\Delta t \Rightarrow \frac{l_0}{\Delta t}=v_1+v_2$$

کمیت $\frac{l_0}{\Delta t}$ آهنگ کاهش فاصلهٔ بین دو ذره را ــ که به هم نزدیك می‌شوند ــ مشخص می‌کند و به‌سرعت این یا آن شیء متحرك بستگی ندارد. $\frac{l_0}{t}$ را V می‌نامیم: V به معنای سرعت نزدیك شدن ذره‌های مفروض به یکدیگر، درچارچوب مرجعی است که نسبت به‌آن‌ها خارجی باشد. به‌این ترتیب: $V=v_1+v_2$.



شکل ۲۶

اگر چارچوب مرجع K را به ذرهٔ α متصل کنیم (شکل ۲۶)، دراین چارچوب، ذرهٔ α ساکن است، ولی ذرهٔ β با سرعت نامعلوم v حرکت می‌کند. چون سرعت چارچوب مرجع K_1 ، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K برابر v_1 و سرعت ذرهٔ β برابر v_2 است ، بنابراین ، طبق قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها داریم: $-v_2=-v+v_1$؛ از این جا نتیجه می‌شود که v ، یعنی سرعت نزدیك شدن ذرهٔ β به ذرهٔ α در چارچوب مرجع خاص اخیر ، برابراست با v_1+v_2. روشن است که سرعت ذرهٔ α هم، نسبت به‌چارچوب مرجع متصل به ذرهٔ β ، همین مقدار است. بنابراین، v را می‌توان دراین‌جا،

سرعت نسبی حقیقی دو ذره نامید. درمکانیک کلاسیک: $v=V$.

درحالتی که سرعت‌های v_1 و v_2 در یك جهت باشند، به‌دست می‌آید: $V=v_1-v_2$ و $v=v_1-v_2$، یعنی باز هم $v=V$.

۲۲۰۱. دو ذرهٔ α و β نسبت به چارچوب مرجع لخت K' حرکت می‌کنند (که درمسألهٔ ۲۱۰۱ دربارهٔ آن صحبت کردیم). برای مشخص بودن وضع فرض می‌کنیم، بردار $\vec{v}'_1$ درجهت بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{v}'_2$ درخلاف جهت بردار $\vec{v}$ باشد (v سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K است). در این صورت، سرعت نسبی نزدیك شدن دو ذره به یکدیگر (مسألهٔ ۲۱۰۱ را ببینید) برابر است با $V'=v'_1+v'_2$. اکنون اگر قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها را درمورد v'_1 و v'_2 به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$v_1=v'_1+v \quad \text{و} \quad v_2=v'_2-v$$

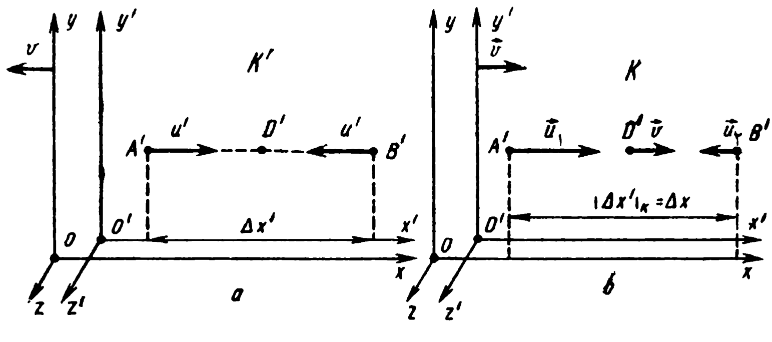
بنابراین درچارچوب مرجع لخت K:

$$V=v_1+v_2=(v'_1+v)+(v'_2-v)=v'_1+v'_2$$

درنتیجه $V'=V$ مقداری ناورداست: $V=\mathrm{inv}$.

۲۳۰۱. از قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها، یعنی $u=u'+v$، به‌ازای $u=\mathrm{const}$، به‌دست می‌آید: $\Delta u=\Delta u'$ و چون $\Delta t=\Delta t'$، بنابراین

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\lim_{\Delta t'\to 0}\frac{\Delta u'}{\Delta t'} \Rightarrow a=a'=\mathrm{inv} \qquad (1)$$



شکل ۲۷

۱۰۲۴۰۱) فرض کنید درچارچوب مرجع لخت K' (شکل ۲۷–a) در یك لحظه، دورویداد α و β (با هرمضمون دلخواه)، به‌ترتیب در نقطه‌های A' و B' اتفاق بیفتند.

ازنقطه‌های A' و B' درلحظهٔ وقوع رویدادهای α و β، سیگنال‌هایی به ترتیب با سرعت‌های u' و $-u'$ می‌فرستیم، که می‌توان آن‌ها را هم، رویدادهایی دانست. درضمن رویدادهای اخیر، از نظر تعریف، هیچ تفاوتی با رویدادهای مفروض α و β ندارند.

در چارچوب K'، هردو سیگنال در یك لحظه به نقطهٔ E' وسط پاره خط $A'B' = \Delta x'$ می‌رسندو این‌خود، یك‌رویداد است که آن را γ می‌نامیم.

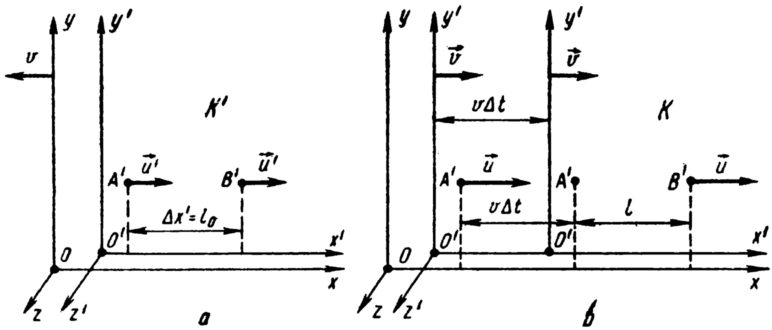
می‌پرسیم: آیا رویدادهای α و β هم، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، هم‌زمان‌اند؟ در این چارچوب مرجع سرعت سیگنال اول (که از A' حرکت می‌کند) برابر است با $u_1 = u' + v$، و سرعت سیگنال دوم (که از B' حرکت می‌کند): $u_2 = u' - v$. سیگنال اول به نقطهٔ D' می‌رسد (سرعت آن در چارچوب مرجع لخت K، برابر v است)، سیگنال دوم به‌طرف نقطهٔ D' حرکت می‌کند (شکل ۲۷–b). باتوجه به‌نتیجه‌گیری‌های مسألهٔ **۲۱۰۱** می‌توان نوشت:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Delta x'|_k}{u_1 - v} \quad \text{و} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Delta x'|_k}{u_2 + v}$$

که در آن‌ها، τ_1 و τ_2 به ترتیب عبارتند از زمان حرکت دو سیگنال تا نقطهٔ D' و $|\Delta x'|_k$ عبارت‌است ازفاصلهٔ $A'B'$ نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K.

به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $\tau_1 = \tau_2$. سپس، ازآن‌جاکه‌رویداد γ باید در چارچوب مرجع لخت K هم اتفاق بیفتد (بنابراصل ناوردایی رویدادها)، در این چارچوب مرجع، هردو سیگنال باهم به نقطهٔ D' می‌رسند. و چون $\tau_1 = \tau_2$، بنابراین گسیل آن‌ها از A' و B' (نسبت به چارچوب مرجع لخت K)، در یك لحظهٔ زمانی صورت گرفته است. به‌این ترتیب، رویدادهای α و β، که درچارچوب مرجع لخت K' هم‌زمان بودند، درچارچوب مرجع لخت K هم، به‌طور هم‌زمان اتفاق می‌افتند، یعنی هم‌زمانی رویدادها ناورداست.

گزارهٔ اخیر، با فرض $c = \mathrm{inv} = \infty$ هم‌ارز است، زیرا هم‌زمانی رویدادها در نقطه‌هـای متفاوت فضا را می‌توان با ارتباط لحظه‌ای سیگنال، یکی دانست.



شکل ۲۸

۲) فرض کنید درچارچوب مرجع لخت K'، سیگنالی باسرعت u'، از نقطهٔ A' به‌سوی نقطهٔ B' حرکت کند (شکل ۲۸ــa و b)، به نحوی که $|\Delta x'| = l_{\circ} = u'\Delta t'$. درچارچوب مرجع لخت K داریم: $\Delta t = \frac{l+v\Delta t}{u}$، که در آن، Δt عبارت است از زمان حرکت سیگنال نقطهٔ A' تا نقطهٔ B'، که با سرعت v حرکت می‌کند؛ l طول پاره خط $\Delta x'$ در چارچوب مرجع لخت K است.

به‌این ترتیب $\Delta t = \frac{l}{u-v}$؛ ولی $\Delta t = \Delta t'$ و $u = u' + v$؛ بنابراین

$$\frac{l_{\circ}}{u'} = \frac{l}{(u'+v)-v}$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $l_{\circ} = l = \mathrm{inv}$.

۲۵۰۱. الف) بنابـر قانون اینرسی (لختی) (قانـون اول نیوتون): «هرنقطهٔ آزاد مـادی (یعنی نقطه‌ای که تحت تأثیر هیچ نقطهٔ مادی دیگـری نباشد)، یا در چارچوب مرجع لخت ساکن است و یا روی یک خط راست به طور یکنواخت حرکت می‌کند».

این قانون، اولاً درچارچوب مرجع لخت صادق است و، ثانیاً تعادل دینامیکی سکون و حرکت راست خط یکنواخت درمورد آن برقرار است.

ازاصل نسبیت گالیله نتیجه می‌شود: وقتی دو چارچوب مرجع لخت دارای سرعت نسبی $\vec{v} = \text{const}$ باشند، هم‌ارزند و هر کدام از آن‌ها را می‌توان درچارچوب مرجع ساکن به حساب آورد، یعنی سکون چارچوب مرجع لخت، به چگونگی حرکت یکنواخت راست خط آن (نسبت به هر چارچوب مرجع لخت دیگر) بستگی ندارد. از آن جا که می‌توان یك چارچوب مرجع لخت خاص به نقطهٔ مادی (که در قانون اینرسی، بحث برسر آن است) مربوط کرد، بنابراین سازگاری متقابل قانون لختی(اینرسی) و اصل نسبیت روشن می‌شود.

ب) بیان ریاضی قانون سوم نیوتون چنین است: $\vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۲۱} = ۰$ (۶۰۱ را ببینید). روشن است که بنابراین قانون، برهم‌کنش نقطه‌های مادی درهرفاصله (هرقدرهم که بزرگ باشد) آنی است و تأثیر یك نقطهٔ مادی بردیگری، در لحظه و بلافاصله، منتقل می‌شود. بنابراین، قانون سوم نیوتون فی‌نفسه کلاسیك است و در تناظر کامل با اصل موضوع دوم نظریهٔ نسبیت کلاسیك قرار می‌گیرد.

۲۶۰۱. قانون دوم نیوتون را برای چارچوب مرجع لخت K' می‌نویسیم: $m\vec{a}' = \vec{F}'$. در چارچوب مرجع لخت K، برای شتاب نقطهٔ مادی داریم: $\vec{a} = \vec{a}'$، زیرا $\vec{a} = \text{inv}$ (۲۳۰۱ را ببینید). جرم m که در این جا، مراد از آن، مشخصه‌ای از نقطهٔ مادی است که براثر اعمال نیرو شتاب پیدا می‌کند (سرعت نقطهٔ مادی را تغییر می‌دهد)، در مکانیك کلاسیك مقداری ناوردا فرض می‌شود (جرم، چیزی است مربوط به ذات ماده که ارتباطی به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت ندارد)، یعنی $m = \text{inv}$.

نیرو عبارت است از اندازهٔ برهم‌کنش نقطه‌های مادی و، درحالت کلی، تابعی است از موضع آن‌ها نسبت به‌هم، سرعت نسبی آن‌ها و زمان:

$$\vec{F}' = \vec{F}'\,(r', V', t')$$

چون $r=\text{inv}$، $V=\text{inv}$ و $t=\text{inv}$، بنابراین نیروی $\vec{F}$ در چارچوب مرجع لخت K، همان است که در چارچوب مرجع لخت K' بود، یعنی $\vec{F'}=\vec{F'}$.

به این ترتیب، قانون اصلی مکانیك، $\vec{F'}=m\vec{a'}$، ضمن عبور از چارچوب مرجع لخت K' به صورت معادلهٔ $m\vec{a}=\vec{F}$ تغییر شکل می‌یابد.

ناوردابودن شکل قانون دوم مکانیك نیوتونی، از دیدگاه اصل نسبیت گالیله، امری طبیعی است. درچارچوب‌های مرجع لخت، که ازنظر مکانیکی هم‌ارزند، جریان پدیده‌های مکانیکی یکسان است و، بنابراین، توصیف آن‌ها صورتی یکسان پیدا می‌کند. همین امر در مورد رابطه‌های معین ناوردایی، برای بازه‌های فضایی و زمانی نیز، که نتیجه‌ای از اصل موضوع نظریهٔ نسبیت کلاسیك هستند، ممکن است. بنابراین، قانون اصلی مکانیك کلاسیك، به طور کامل، با نظریهٔ نسبیت کلاسیك سازگار است.

۰۲۷.۱ بنابر تعریف، رابطهٔ $m\vec{u'}=\vec{p'}$ عبارت است از اندازهٔ حرکت نقطهٔ مادی درچارچوب مرجع لخت K'، که در آن، سرعت ذره $\vec{u'}$ است (آن را درهمان جهت $\vec{v}$، سرعت‌نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K'و K، می‌گیریم) (شکل ۲۰ را ببینید).

دراین صورت، درچارچوب مرجع لخت K داریم: $\vec{u}=\vec{v'}+\vec{v}$، و چون $m=\text{inv}$، بنابراین

$$m\vec{u}=m\vec{u'}+m\vec{v} \Rightarrow \vec{p}=\vec{p'}+m\vec{v}$$

که عبارت است از قانون تبدیل اندازهٔ حرکت، برای چارچوب‌های مرجع لخت K' و K. بادرنظر گرفتن‌عملگر«Δ»، یعنی $\Delta\vec{p}=\Delta\vec{p'}+\Delta(m\vec{v})$، خواهیم داشت: $\Delta\vec{p}=\Delta\vec{p'}$ (زیرا با توجه به $\vec{v}=\text{const}$ داریم: $\Delta(m\vec{v})=0$). به‌این‌ترتیب: $\Delta\vec{p}=\text{inv}$، وچون $\Delta t=\text{inv}$، بنابراین

$\cdot \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \text{inv}$

۱۰۲۸.۰ اگر در رابطهٔ $\vec{F} = m\vec{a}$ بگیریم: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (شتاب عبارت است از مشتق اول سرعت نسبت به زمان)، به‌دست می‌آید: $\vec{F} = \frac{m\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

از این‌جا نتیجه می‌شود که، به‌ازای $m = \text{const}$، داریم: $\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$

یا $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$. به این ترتیب، دو شکل قانون دوم نیوتون

$\left(m\vec{a} = \vec{F} \text{ و } \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}\right)$ درمکانیک کلاسیک هم‌ارزند.

۰۲۹.۰۱ فرض کنید $\vec{F} = \text{const}$، $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \text{const}$. بنابراین به‌صورت اسکالر داریم: $\Delta(mv) = F\Delta t$. بااستفاده از ویژگی‌های عملگر «Δ» می‌نویسیم:

$$\Delta(mv - Ft) = 0 \Rightarrow mv - Ft = \text{const}$$

اگر برای شرط‌های اولیهٔ حرکت داشته باشیم: $v = 0$ به‌ازای $t = 0$، آن وقت مقدار ثابت صفر می‌شود و از رابطهٔ $mv - Ft = 0$ به‌دست می‌آید: $v = \frac{F}{m}t$.

این رابطه، معرف قانون تغییر سرعت برای حرکت با شتاب ثابت است $\left(v = at \text{ ، } a = \frac{F}{m}\right)$، و از آن نتیجهٔ مهمی که مشخص کنندهٔ خصلت مکانیک کلاسیک است، به دست می‌آید: $v \to \infty$ به ازای $t \to \infty$؛ یعنی نیروی ثابتی که بر نقطهٔ مادی وارد می‌آید. می‌تواند در خلال زمان، سرعت آن را به طور نامتناهی افزایش می‌دهد.

۳۰۰۱. قانون‌دوم نیوتون را به‌ازای $\vec{F}=\text{const}$، به‌صورت اسکالر می‌نویسیم: $F=\frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$ و دو طرف آن را در سرعت $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت: $F\Delta x=v\Delta(mv)$، یا $F\Delta x=mv\Delta v$. با توجه به‌این‌که $F\Delta x=A$ (A، کار نیروی $\vec{F}$ درجابه‌جایی Δx)، داریم:

$$mv\Delta v=A \qquad (۱)$$

اکنون، ثابت می‌کنیم که

$$\Delta(v^۲)=۲v\Delta v \qquad (۲)$$

به‌یاد می‌آوریم که نمو تابع $y=f(x)$، به‌صورت

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$\Delta(v^۲)=(v+\Delta v)^۲-v^۲=۲v\Delta v$$

که درآن $(\Delta v)^۲=۰$ (نسبت به Δv، بی‌نهایت کوچك است). به‌این‌ترتیب، رابطهٔ (۲) ثابت می‌شود. از (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\Delta\left(\frac{mv^۲}{۲}\right)=A \qquad (۳)$$

با تعریف انرژی جنبشی نقطهٔ ماده، به‌عنوان انرژی حرکتی (یعنی مقداری‌که به سرعت وابسته است)، و با توجه به این‌که می‌توان براساس رابطهٔ (۳)، انرژی حرکتی را با کار نیرو عوض کرد، نتیجه می‌گیریم که: مقدار $\frac{mv^۲}{۲}$ همان انرژی جنبشی است، یعنی

$$\frac{mv^۲}{۲}=E_k \qquad (۴)$$

باید تأکید کرد، عبارتی‌که برای انرژی جنبشی به‌دست آوردیم، در واقع کلاسیك است، زیرا براساس قانون دوم نیوتون و، در تحلیل نهایی، درنظریهٔ نسبیت کلاسیك پیدا شده است.

۳۱۰۱. با نوشتن‌قانون‌بقای‌اندازهٔ‌حرکت، $m\vec{v}=m_۱\vec{v}_۱+m_۲\vec{v}_۲$، و جرم، $m=m_۱+m_۲$، و تصویر معادلهٔ برداری برمحورهای x و y در

چارچوب مرجع آزمایشگاه (شکل ۳ را ببینید) ، به دست می آوریم:

$$\begin{cases} mv = m_1 v_1 \cos\frac{\varphi}{2} + m_2 v_2 \cos\frac{\varphi}{2} \\ 0 = m_1 v_1 \sin\frac{\varphi}{2} - m_2 v_2 \sin\frac{\varphi}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

با حل دستگاه معادله‌های (۱) خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v}{2m_1\sqrt{1+\cos\varphi}} \quad \text{و} \quad v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v}{2m_2\sqrt{1+\cos\varphi}} \qquad (2)$$

حالت $\vec{v} = 0$ جالب است. در این حالت $\varphi = \pi$ و قانون بقای اندازهٔ حرکت به‌صورت $m_1 v_1 = m_2 v_2$ در می آید، که اگر از برابری $m = m_1 + m_2$ استفاده کنیم، به‌دست می آید:

$$m_1 = m \cdot \frac{v_2}{v_1 + v_2} \quad \text{و} \qquad m_2 = m \cdot \frac{v_1}{v_1 + v_2}$$

دربارهٔ مقدارهای v_1 و v_2، هیچ‌مطلب مشخص دیگری نمی‌توان گفت، جز این که $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

۳۲۰۱. نشان می‌دهیم که در فیزیك کلاسیك نمی‌توان مسألهٔ مربوط به‌انرژی دورنی ذره را ، به طور مشخص، حل کرد.

انرژی کل ذره را E می گیریم که برابر است با $E = E_0 + E_k$ (E_0 انرژی درونی و E_k انرژی جنبشی ذره) . انرژی جنبشی را در مکانیك کلاسیك، می‌توان با دقت بیان کرد : $E_k = \frac{mv^2}{2}$. ولی مقدار E_0 چقدر است؟

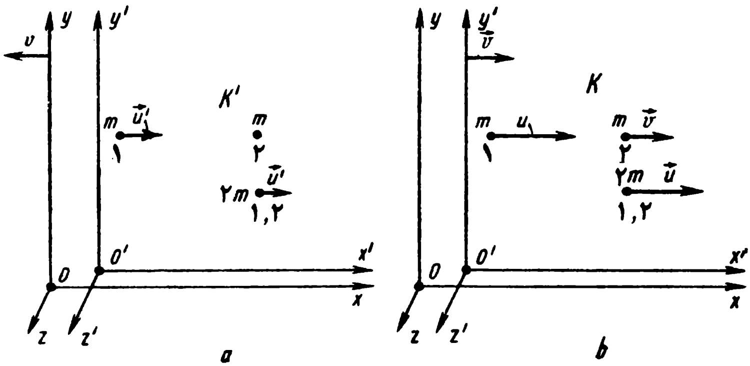
از آنجاکه E_0 ، انرژی خاص ذره است که مستقل از انتخاب چارچوب مرجع لخت، تنها به چگونگی درونی ذره بستگی دارد ، بنابراین E_0 بایدکمیتی ناوردا باشد. با توجه به‌کیفیت مربوط به بُعد، روشن است که E_0 با جرم و مجذور سرعت متناسب است.

چون $m=\text{inv}$ ، بنابراین ناوردا بودن $E_\circ$ مستلزم ناوردا بودن سرعت است. ولی در مکانیك کلاسیك، تنها یك سرعت ناوردا وجود دارد: $c=\text{inv}=\infty$. به‌این‌ترتیب

$$E_\circ \sim mc^{2}=\text{inv}=\infty$$

به این ترتیب، در فیزیك کلاسیك، انرژی درونی ذره و همراه با آن انرژی کل E ، مقدار نامتناهی است.

۰۳۳.۱ فرض‌کنید دو ذره درچارچوب مرجع لخت K' برخوردی ناکشسان داشته باشند، به نحوی‌که یکی از آن‌ها ساکن باشد و دیگری با سرعت $\vec{u}'_1$ هم‌جهت با $\vec{v}$ (سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع‌لخت K' و K) حرکت‌کند (شکل ۲۹–a). جرم این ذره‌ها برابرند با $m_1=m_2=m$.



شکل ۲۹

قانون بقای اندازهٔ حرکت درچارچوب مرجع لخت K' ، $m\vec{u}'_1=2m\vec{u}'$ در تصویر برامتداد بردار $\vec{v}$ به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$mu'_1=2mu' \qquad (1)$$

که درآن، u' سرعت ذرهٔ مرکب (با جرم $2m$) بعد از برخورد است.

درچارچوب مرجع لخت K ، سرعت ذره‌ها قبل ازبرخورد به‌ترتیب v و u_1 وبعد ازبرخورد u است(شکل ۲۹–b). دراین چارچوب‌مرجع، قانون بقای اندازهٔ حرکت به این صورت است:

$$mu_1+mv=2mu \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

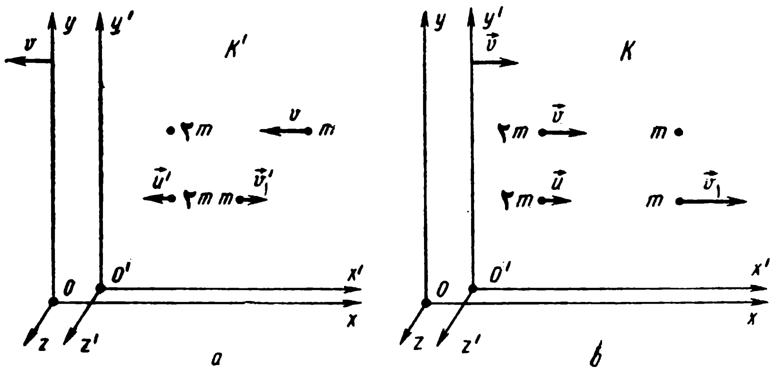
$$u_1-u=\frac{1}{2}(u_1-v) \quad \text{و} \quad u'_1-u'=\frac{1}{2}u'_1 \qquad (3)$$

چون u و v را می‌توان سرعت‌های مثلاً ذرهٔ ۱ بعد از برخورد، به‌ترتیب، درچارچوب‌های K' و K به‌حساب آورد، بعد از ضرب کردن در m، از (۳) به‌دست می‌آید (با در نظر گرفتن $\Delta\vec{p}=\text{inv}$).

$$u'_1=u_1-v \Rightarrow u_1=u'_1+v$$

یعنی قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها (برای ذرهٔ ۱).

حالا برخورد کشسان دو ذره را درنظرمی‌گیریم. درضمن فرض‌می‌کنیم درچارچوب مرجع لخت K' ، قبل از برخورد، یکی از ذره‌ها باجرم $2m$ ساکن، و دیگری با جرم m سرعتی برابر $\vec{v}$ داشته باشد (شکل ۳۰–a).



شکل ۳۰

قانون‌های بقای اندازهٔ حرکت و انرژی جنبشی را برای این ذره‌ها درچارچوب مرجع لخت K می‌نویسیم:

$$mv=2mu'-mv'_1 \quad \text{و} \quad \frac{mv_2}{2}=\frac{2mu'^2}{2}+\frac{mv'^2_1}{2}$$

از آن جا $v=2u'-v'_1$ ، $v_2=2u'^2+v'^2_1$ که u' سرعت ذرهٔ به‌جرم $2m$

بعد از برخورد، و v'_1 سرعت ذرهٔ به جرم m بعد از برخورد است. در این‌جا، قانون بقای اندازهٔ حرکت در تصویر بر امتداد $\vec{v}$ داده شده است.

از رابطه‌هایی که نوشتیم به‌دست می‌آید: $u'=\frac{2}{3}u$ ، $v'_1=\frac{1}{3}v$.

همین قانون‌های بقا ، در چارچوب مرجع لخت K (شکل b–۳۰) ، به این صورت است:

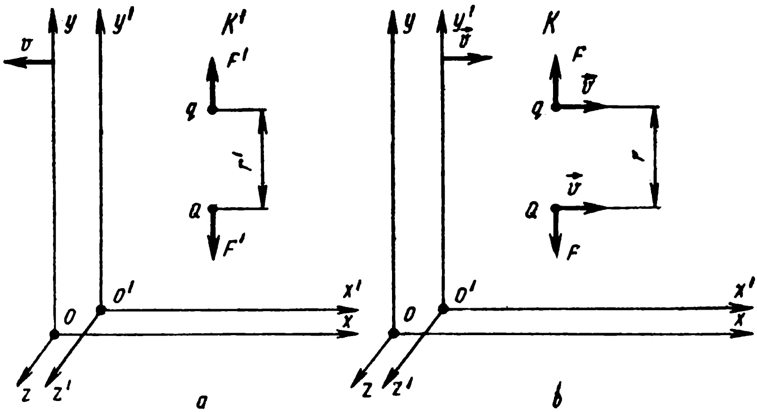
$$2mv=2mu+mv_1 \quad , \quad \frac{2mv^2}{2}=\frac{2mu^2}{2}+\frac{mv_1^2}{2}$$

یا $2v=2u+v_1$ ، $2v^2=2u^2+v_1^2$ ، کـه در آن‌ها u و v_1 به‌ترتیب سرعت ذره‌های به‌جرم $2m$ و m ، بعد از برخورد هستند. باحل این دستگاه‌معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{1}{3}v \quad , \quad v_1=\frac{4}{3}v$$

به سادگـی می‌توان تحقیق کـرد کـه ، برای ذره‌های به جرم $2m$: $u=u'-v$ ؛ واین همان قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها (درحالت‌جهت‌های مخالف $\vec{u'}$ و $\vec{v}$) می‌باشد. و چـون این قانون، به طور کامل، برنظریهٔ نسبیت کلاسیك تکیه دارد ، بنابراین بحث فوق، یکبار دیگر گـواه بربستگی عمیق قانون بقای اندازهٔ حرکت کلاسیك و انرژی، درنظریهٔ نسبیت کلاسیك است.

۳۴.۱. درچـارچوب مرجـع لخت K' (متصل به ذره‌هـای متحرك) (شکل ۳۱) ، هر دو ذره ساکن‌اند و نیرویی که به طور متقابل بر آن‌ها وارد می‌آید، بنابرقانون کـولن ، بـرابـر است بـا $F'=k\cdot\frac{qa}{r'^2}$ (که در آن ، $k=\text{const}$، وابسته به انتخاب دستگاه واحدهاست). سرعت بارها، نسبت به‌چارچوب مـرجع لخت آزمایشگاه K ، v است. از آن جا که بار ، بسته به‌چگونگی درونی ذره‌هاست، بنابراین باید ناوردا باشد (درغیراین‌صورت، مثلاً به‌خـاطر حرکت آن، خنثی بودن الکتریکی اتم از بین می‌رود، چیزی که درعمل مشاهده نمی‌شود). کمیت $r=\text{inv}$، بنابراین درچارچوب مرجع



شکل ۳۱

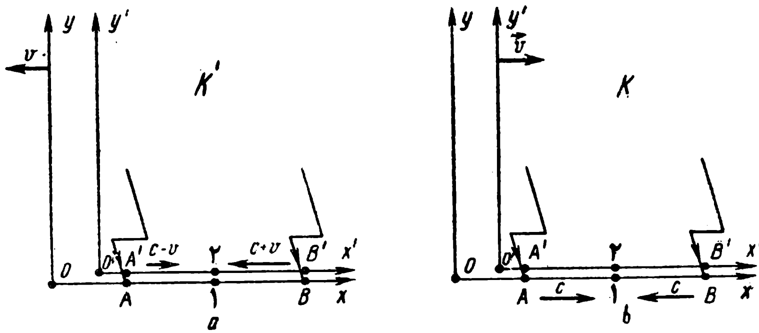
لختKداریم: $F=k\cdot\frac{qQ}{r^{2}}=F'$ ، یعنی نیروی برهم‌کنش بارها ، به‌سرعت حرکت آن‌ها درچارچوب مرجع آزمایشگاه، بستگی ندارد.

این نتیجه‌گیری، درمحدودهٔ قانون‌های فیزیـك کلاسیك، امری طبیعی است. زیرا درآن $F=\mathrm{inv}$. با وجود این، تجربه درمورد بارهای متحرك به نتیجهٔ دیگری می‌رسد: $F\neq F'$. و این، به خاطر آن است‌که، علاوه بـر «بـرهم‌کنش الکتریکـی» ، «برهم‌کنش مغناطیسی» هم وجـود دارد (§ ۵ را ببینید).

۱.۳۵ قانون اصلی دینامیك کلاسیك را به این صورت می‌نویسیم : $m\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}=qE$. چون $F=qE=\mathrm{const}$ ، بنابرایـن $v=at$ (به شرط $v_{0}=0$) و معادلـهٔ حـرکت چنین است: $x=\frac{1}{2}at^{2}$ یا $x=\frac{qE}{2m}t^{2}$ (زیرا $ma=qE$) . از ایـن جا نتیجه می‌شودکـه ، به ازای $t\to\infty$ ، داریم : $v\to\infty$ $(x\to\infty)$ ، یعنی طبق قـانون‌های مکانیك‌کلاسیك ، در میدان، یکنواخت الکتریکـی، سرعت ذرهٔ باردار، درطول زمـان، به‌طور نامتناهی زیاد می‌شود.

۱.۳۶ چارچوب مرجع لخت K را متصل به خط‌آهن و چارچوب

مرجع K' را متصل به‌قطار در نظر می‌گیریم (شکل ۳۲). این نام‌گذاری‌ها را می‌پذیریم: $l' = |A'B'|$ و $l = |AB|$، درضمن $l' = l$ (زیرا $l = \mathrm{inv}$).



شکل ۳۲

فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K ، سرعت نور همسانگرد و برابر $c<\infty$ باشد (با $c = \mathrm{inv} = \infty$ اشتباه نکنید!). در این صورت، زمان لازم برای رسیدن سیگنال نوری از A و B به‌ناظر ۱ (درچارچوب مرجع لخت K) یکی است، یعنی $\tau_1 = \tau_2 = \dfrac{l}{2c}$ ، و او درخشش آذرخش را در A و B دریك لحظه ثبت می‌کند.

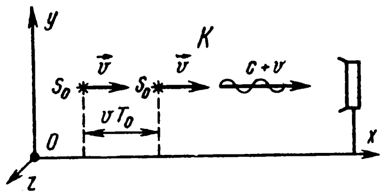
درچارچوب مرجع K' ، بنابر قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها ، باید سرعت یکی از سیگنال‌ها برابر $c'_1 = c - v$ و سرعت دیگری برابر $c'_2 = c + v$ باشد. چون گسیل سیگنال‌ها از A' و B' هم‌زمان است (زیرا این دو رویداد درچارچوب‌مرجع‌لخت K هم‌زمان‌اند، وهم‌زمانی رویدادها، امری مطلق است) ، بنابراین ، ناظر ۲ در قطار، دو سیگنال را در یك زمان دریافت نمی‌کند، زیرا

$$\tau'_2 = \frac{l'}{2(c-v)} \neq t'_2 = \frac{l'}{2(c+v)}$$

یعنی درخشش آذرخش را در B زودتر ازدرخشش A می‌بیند.

۰۳۷۰۱ چارچوب‌مرجع لخت K_0 را متصل به‌منبع S_0 می‌گیریم. چون

دورهٔ تابش در چارچوب مرجع لخت $K_\circ$ برابر است با $T_\circ=\frac{1}{\nu_\circ}$، پس بنابرنظریهٔ نسبیت کلاسیك، نسبت به چارچوب مرجع لخت K هم برابر $T_\circ$ (زیرا $\tau=\text{inv}$ وعبارت است از فاصلهٔ زمانی نخستین و آخرین تابش یك



شکل ۳۳

موج نوری. اگـر هم منبع $S_\circ$ درچارچوب مرجع لخت K ساکـن باشد، آن‌گاه روشن است‌که دریافت ابتدا و انتهای موج درفاصلهٔ زمانی $T_\circ$اتفاق می‌افتد. ولی به دلیل این‌که منبع $S_\circ$ با سرعت v به طـرف گیرنده حرکت می‌کند (شکل ۳۳) ، انتهـای موج، فاصله‌ای به‌اندازهٔ $vT_\circ$کمتر از ابتدای آن می‌پیماید و، بنابراین،دورهٔ دریافت تابش به‌وسیلهٔ گیرنده، به‌اندازهٔ زمان $\frac{vT_\circ}{c+v}$ (که‌درآن، بنابرنظریهٔ نسبیت کلاسیك، $c+v$ عبارت است ازسرعت نور درچارچوب مرجع لخت K) کاهش می‌یابد:

$$T-T_\circ-\frac{vt_\circ}{c+v}=\frac{T_\circ c}{c+v}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\nu=\nu_\circ\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{1}$$

و درحالتی‌که منبع نور دور شود:

$$\nu=\nu_\circ\left(1-\frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

روشن است‌که این حقیقت را می‌توان با تجربه تحقیق‌کـرد. درعمل معلوم می‌شودکه $\nu\neq\nu_\circ$، ولی رابطهٔ آن‌ها، چیز دیگری وغیر از رابطه‌های

(۱) و (۲) است. چگونگی آن را می‌توان به‌کمک نظریهٔ نسبیت خاص روشن کرد (۸۰۶ را ببینید).

جمع‌بندی کوتاهی از نتیجه‌گیری‌ها

نظریهٔ نسبیت کلاسیک، شاخهٔ مشخصی از فیزیك کلاسیك نیست، بلکه شالوده‌ای برای اندیشه‌های فیزیك عمومی است. درواقع، این نظریه‌عبارت است ازدستگاهی از اصل موضوع‌ها درباره ویژگی‌های عمومی ماده (اصل موضوع‌های اول، دوم و سوم) و ویژگی‌های عام فضا و زمان (اصل موضوع‌های چهارم و پنجم)، برای چارچوب مرجع لخت.

بنابراین، نظریهٔ نسبیت کلاسیك به موضوع‌هایی می‌پردازد که به‌ویژگی‌های فضاوزمان مربوط می‌شوند وضمن مقایسهٔ دو چارچوب مرجع لخت ــ که نسبت به‌هم با سرعت v حرکت می‌کنند ــ پدید می‌آیند. درضمن روشن می‌شود که هم زمانی رویدادها، امری ناورداست. فاصله‌های زمانی و فضایی هم، مستقل از انتخاب چارچوب مرجع لخت‌اند. بنابراین، زمان عام و فضای مطلق، برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، یکی است.

قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها، شالودهٔ سینماتیك کلاسیك است:
$\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}$، که در آن، v و v' به‌ترتیب سرعت ذره در چارچوب‌های مرجع لخت K و K'، و v سرعت نسبی این دو چارچوب است. طبق این قانون، سرعت مطلق نامتناهی است و برای همهٔ سیگنال‌ها و ذره‌ها سرعتی «حدی» است: بسته به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت، سرعت سیگنال یا ذره‌می‌تواند به‌هر مقداری برسد.

دینامیك کلاسیك‌هم، به‌طور کامل، با نظریهٔ نسبیت کلاسیك‌سازگار است: قانون اول آن، دقیقاً به اصل نسبی بودن بستگی دارد؛ قانون دوم آن، نسبت به‌تبدیل گالیله، ناورداست و بنا بر قانون سوم آن، سرعت انتقال هرکنشی، آنی است (طبق اصل موضوع دوم نظریهٔ نسبیت کلاسیك).

اندازهٔ حرکت نقطهٔ مادی: $\vec{p}=m\vec{v}$، و انرژی جنبشی، $E_k=\frac{mv^2}{2}$ ، را باید ازخصلت‌های بیان کلاسیك شمرد. مفهوم انرژی درونی‌مبهم می‌ماند، زیرا $E_0=mc^2=\infty$.

ضمن پرداختن نظریـهٔ الکترومغناطیس و نور بر اساس نظریهٔ نسبیت کلاسیك، نتیجه‌هایی به‌دست می‌آیدکه با تجربه ناسازگارند.

§۲. پایه‌های نظریهٔ نسبیت خاص. ویژگی نسبی بودن فضا و زمان

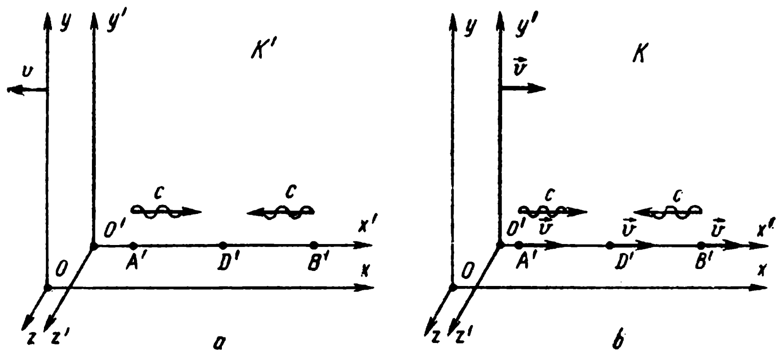
۰۱۰۲ اصل موضوع دوم نظریهٔ نسبیت کلاسیك، دربارهٔ امکان اصولی ناوردا بودن سرعت نامتناهی ($c=\text{inv}=\infty$)، از دیدگاه فیزیکی، فقیر و بی‌پایه است، زیرا مقدار نامتناهی برای هر کمیتی (و از آن جمله، سرعت) نمی‌تواند معنایی واقعی داشته باشد. بنابراین، طرحی را که نظریهٔ نسبیت کلاسیك از جهان ما ترسیم می‌کند، باید نخستین تقریب از واقعیت دانست. به‌زبان دیگر، مدل نظری نیوتونی از طبیعت، ازکمال فاصله دارد و تنها با شرط‌های معینی می‌تواند با نتیجه‌های حاصل از تجربه سازگار باشد، یعنی حوزهٔ کاربردآن تنگ و محدوداست. این نظریه، مثلاً، برای توضیح پدیدهٔ الکترومغناطیسی، نارسا و بی‌فایده است. پیشرفت فیزیك ــ کشف پدیده‌های تازه ومسألهٔ پرداختن نظریهٔ مربوط به‌آن‌ها درچارچوب طرح واحد فیزیکی جهان (یعنی ساختن پایهٔ عام معینی برای فیزیك) ــ نیاز به‌مدلی‌کامل‌تر ازمدل نیوتونی را به‌وجودمی‌آورد. مدل جدید بایدچنان باشدکه بتواند به‌صورتی کامل‌تر، واقعیت‌ها را منعکس کند.

ازآن جا که‌گزارهٔ $c=\text{inv}=\infty$ قابل قبول نیست، اندیشهٔ اصلاح آن به‌طور طبیعی پیش می‌آید: فرض می‌کنیم کـه برای سرعت مبنا داشته

باشیم: $c = \mathrm{inv} < \infty$، یعنی سرعت‌مبنا را مقداری متناهی درنظرمی‌گیریم. ولی هنوز این پرسش وجود دارد که: آیا، این اصل، با طبیعت سازگار است و با تصویر نیوتونی دربارهٔ ویژگی‌های فضا وزمان، تا چه‌حد متناقض‌است؟

اولاً در این حالت، قانون کلاسیك تبدیل سرعت، نادرست ازآب درمی‌آید. ثانیاً، جایی برای ویژگی‌های کلاسیك نسبی بودن فضا و زمان باقی نمی‌ماند (به‌یاد بیاوریم، این ویژگی‌ها، دقیقاً به قانون کلاسیك تبدیل سرعت، بستگی دارند).

در مورد مطلب اخیر، به‌سادگی و با در نظر گرفتن تجربهٔ ذهنی زیر، می‌توان قانع شد: در چارچوب مرجع K'، از نقطه‌های A' و B' و در یك زمان، دو سیگنال بـه‌طرف نقطهٔ D'، وسط پاره خط $A'B'$، گسیل می‌کنیم. طبیعی است که، این دو سیگنال، باهم به‌نقطهٔ D' می‌رسند (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

این پدیده در چارچوب مرجع K چگـونه جریان می‌یابد؟ نقطهٔ D' در این چارچوب، با سرعت v به‌طرف یکی از سیگنال‌ها می‌رود و، در عین حال، از سیگنال دیگر دور می‌شود. ازآن جا که رویداد نقطهٔ D' (رسیدن دو سیگنال به‌طور هم‌زمان بـه‌آن) در چارچوب مرجع K' اتفاق می‌افتد، بایـد در چارچوب مرجع K هـم اتفاق بیفتد (بنابـر اصل نـاوردابودن رویدادها). ولی دراین صورت، برای این‌که هردو سیگنال به‌طور هم‌زمان به D' برسند (نسبت بـه‌چارچوب مرجع K)، باید در زمان‌های مختلف از

A' و B' گسیل شده باشند.

به‌این ترتیب، با فــرض $c = \mathrm{inv} < \infty$، مفهوم هم‌زمانی رویدادها نقض می‌شود.

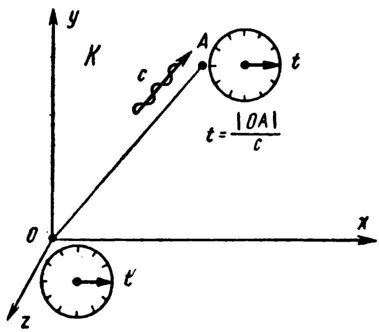
۲۰۲. آلبرت اینشتین، در سال ۱۹۰۵، نظریهٔ تازهٔ نسبیت را ساخت. نظریهٔ نسبیت خاص را به‌جای نظریهٔ قدیمی نسبیت کلاسیك گذاشت و اصل موضوع دوم را به‌این ترتیب تنظیم کرد: برای چارچوب مرجع لخت، سرعت مبنای متناهی و مطلق وجود دارد، یعنی $c = \mathrm{inv} < \infty$.

این اصل موضوع اینشتین، از دیدگاه فیزیکی کاملاً قانون‌مند بود (۱۰۲ را ببینید)، ولی از آن جا کــه با تصور عادی کلاسیك دربارهٔ فضا و زمان ناسازگار بود، طرح آن به‌شجاعت فوق‌العاده‌ای نیاز داشت. روشن است که فرض $c = \mathrm{inv} < \infty$، برشالودهٔ فیزیك اثرمی گذاشت و ضرورت بازسازی ریشه‌ای آن را می‌طلبید و، همان طور کــه خواهیم دید، در واقع هم، این بازسازی ریشه‌ای انجام گرفت.

چارچوب مرجع لخت را می‌توان شبیه آن چــه در نظریــهٔ نسبیت کلاسیك داشتیم، یعنی بر اساس قــانــون اینرسی گالیله، تعریف کرد. ولی پرسشی پیش می‌آید: به چه ترتیب می‌توان چارچوب مرجع لخت را تحقق بخشید؟

اولاً با انتخاب جسم مرجع (که یا ساکن است و یا نسبت به دستگاه ثابت، حرکتی یکنواخت و راست خط دارد)، آن را کاملاً به‌دستگاه مختصات دکارتی x، y، z که با ابزارهای اندازه‌گیری ــ مقیاس‌های فضایی (۱۰۱ را ببینید) مجهز است، متصل می‌کنیم.

ثانیاً درهمهٔ نقطه‌های (x, y, z) ساعت‌های ایده‌آل (یعنی ساعت‌هایی کاملاً دقیق و با آهنگی یکنواخت) قرارمی‌دهیم و آن‌ها را هم‌زمان می‌کنیم. سیگنال مبنای $c = \mathrm{inv} < \infty$ را بــه‌عنوان اصل موضوع دوم چارچوب مرجع لخت، مورد استفاده قرار می‌دهیم. از نقطهٔ O مبداء مختصات x، y، z (شکل ۳۵) ــ در لحظهٔ $t = 0$ (بنا بــه‌ساعت نقطهٔ O) سیگنالی با سرعت c گسیل می‌کنیم (در جهتی دلخواه). اگــر سرعت سیگنال مبنا و فاصلهٔ OA معلوم باشند، آن‌گاه در لحظه‌ای کــه سیگنال به A می‌رسد، ساعت نقطهٔ A،



شکل ۳۵

زمان $t=\dfrac{|OA|}{c}$ را نشان می‌دهد. آن وقت، ساعت نقطهٔ A (طبق تعریف) هم زمان با ساعت نقطهٔ O کار می‌کند. با این روش، همهٔ ساعت‌های دستگاه x، y، z ـ بعد از آن‌که مفهوم زمان چارچوب مرجع معنا پیدا کند ـ هم‌زمان می‌شوند.

وقتی مقدار سرعت سیگنال مبنا معلوم باشد، بنابر تعریف فرض می‌کنیم: ساعت A وقتی هم‌زمان با ساعت O کار می‌کند که در لحظهٔ رسیدن سیگنال به‌آن‌ها، زمان $\frac{\tau}{۲}$ را نشان دهند، که در آن، τ عبارت است از فاصلهٔ زمانی لازم، از روی ساعت O، برای حرکت سیگنال مبنا از O به A و برعکس (در نقطهٔ A، دستگاهی قرار دارد که سیگنال را برمی‌گرداند).

همان طور که در ۱۰۱ یادآوری شد، امکان هم زمان کردن ساعت‌ها به‌کمك انتقال آن‌ها امکان‌پذیر است. ولی در این جا باید دانست، حرکت ساعت چه تأثیری برکار آن (در مقایسه با ساعتی که ساکن است) می‌گذرد. پاسخ به این پرسش را می‌توان بر اساس نظریهٔ نسبیت خاص پیدا کرد (۳۶۰۲ را ببینید).

روش هم‌زمان کردن ساعت‌ها به‌وسیلهٔ سیگنال مبنا، این برتری جدی را دارد که روند هم‌زمانی برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، به ترتیب یکسانی (یعنی به‌صورت ناوردا) تعریف می‌شود.

۳۰۲. با حل مسألهٔ مربوط بـه‌ساختمان دستگاه انـدازه‌گیری وضع فضایی و لحظهٔ زمانی در چـارچـوب مرجع لخت اولیه، می‌پـرسیم: چند چارچوب مرجع لخت می‌تواند وجود داشته باشد یا، آیا چارچوب مرجعی که با سرعت $v=\text{const}$ نسبت به چارچوب مرجع لخت مفروض حرکت می‌کند، بازهم یك چارچوب مرجع لخت است؟ به‌زبان‌دیگر، آیا اصل نسبیت درست است؟

نارسایی اصل نسبیت گالیله در این است که در آن، تنها برهم ارزی همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت برای پدیده‌های مکانیکی، تـأکید می‌شود. این اصل، از دیدگاه منطق علمی، نمی‌تواند پایهٔ تمامی فیزیك قـرار گیرد، زیرا واحد مادی پدیده‌های مختلف فیزیکی را منعکس نمی‌کند (و پدیده‌های مکانیکی را، به‌عنوان پدیده‌های خاصی، جدا می‌کند).

اینشتین در نخستین اصل موضوع نظریهٔ نسبیت خاص، نظام نسبیت را به‌عنوان گزاره‌ای برای تمامی جهان فیزیکی تنظیم می‌کند: همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، نسبت به همهٔ فرایندهای فیزیکی، هم ارزند.

این اصل به‌معنای آن است که هر پدیده‌ای، با هر ماهیت فیزیکی، در همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، بـه صورتی یکسان جریان پیدا می‌کند و، بنابراین، با تجربه‌های فیزیکی که دردرون آزمایشگاه انجام می‌شود، نمی‌توان معین کرد که چارچوب‌مرجع لخت وابسته به‌آن، نسبت به‌یك چارچوب‌مرجع لخت دیگر، با سرعت ثابت $\vec{v}$ حرکت می‌کند، یا نسبت به‌آن ساکن است.

بنابراین مـی‌تـوان گفت: حرکت چارچوب مرجع لخت با سرعت $\vec{v}=\text{const}$ (نسبت به‌هرچارچوب مرجع لخت دیگر ومثلاً چارچوب متصل به‌ستارگان ثابت)، هیچ تأثیری بر فرایند فیزیکی درون‌آن ندارد.

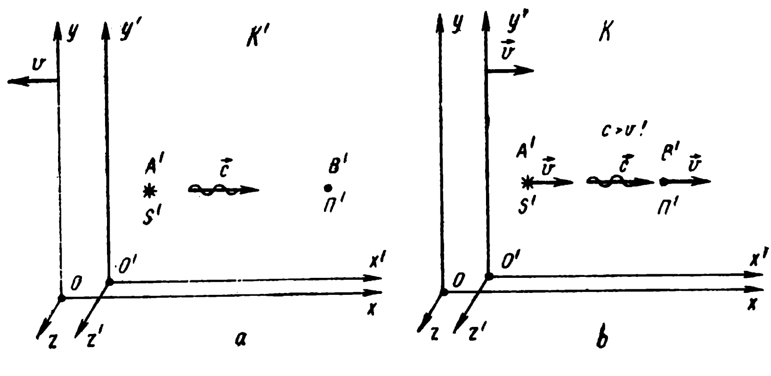
به این ترتیب، چارچوب مرجعی کـه با سرعت $\vec{v}=\text{const}$ نسبت به‌چارچوب مرجع لخت مفروض حرکت می‌کند، خود یك چارچوب مرجع لخت است و، بنابراین، جـز چارچوب مرجع لخت اولیه، مجموعه‌ای از چارچوب‌های مرجع لخت دیگرهم وجود دارد.

۲۰۴. اینشتین اصل موضوع‌های چهارم و پنجم نظریهٔ نسبیت کلاسیک را، دربارهٔ همگنی و همسانگردی فضا و همگنی زمان در چارچوب مرجع لخت، برای نظریهٔ نسبیت خاص هم، بدون تغییر، پذیرفت. در نظریهٔ نسبیت خاص، اقلیدسی بودن، همگنی و همسانگردی فضای چارچوب مرجع لخت (اصل موضوع چهارم)[1] و همگنی زمان (اصل موضوع پنجم)، اصل موضوع می‌شود.

۲۰۵. در فیزیك کلاسیك، در ارتباط با اصل دوم نظریهٔ نسبیت کلاسیك، یعنی $c = \mathrm{inv} = \infty$، فرض بر ایـن است کـه سرعت نسبی دو چارچوب مرجع لخت K' و K می‌تـوانـد به دلخواه بزرگ باشد: $v < \infty$ (اصل موضوع سوم نظریهٔ نسبیت کلاسیك).

در نظریهٔ نسبیت خاص، بـه عنوان اصل موضوع سوم، پذیـرفته‌شده است: سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت، اکیداً کوچکتر از سرعت سیگنال مبنا است، یعنی $v < c$.

برای این‌که مفهوم درونی ایـن گزاره را روشن کنیم، دو چارچوب مرجع لخت K' و K را در نظر می‌گیریـم (شکل ۳۶)، و فرض می‌کنیم، یکی نسبت به‌دیگری، با سرعت v درحرکت باشد. فرض کنید در چارچوب



شکل ۳۶

1. مثل نظریهٔ نسبیت کلاسیك، دراین جا هم، فضا را سه‌بعدی و همبند (مرتبط) می‌گیرند (۴۰۱ را ببینید).

مرجع لخت K' از نقطهٔ A' (جایی کــه چشمهٔ S' وجود دارد) سیگنال مبنا به‌طرف نقطهٔ B' (که درآن جا گیرندهٔ Π' قــرار دارد) گسیل شود. این پدیده در چارچوب مرجع لخت K، چگونه اتفاق می‌افتد؟

برای پاسخ دادن به‌این‌پرسش، باید رویداد را در نظریهٔ نسبیت‌خاص تعریف‌کرد. تعریف رویداد، درنظریهٔ نسبیت خاص، همان است‌که در نظریهٔ نسبیت‌کلاسیك داشتیم:رویداد عبارت است ازیك عمل فیزیکی موضعی در فضاوزمان، بامشخصهٔ‌مختصاتی (x, y, z, t) یکسان، که‌برای همهٔ‌چارچوب‌های مرجع لخت‌ناوردا است.

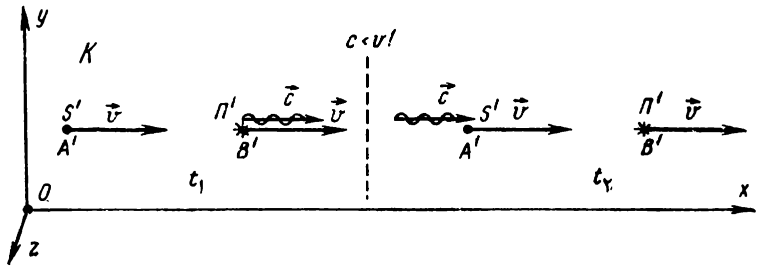
در چــارچوب مرجع لخت K، سیگنال مبنا، مثل‌قبل، دارای سرعت c است، و چشمهٔ S' و گیرنــدهٔ Π' با سرعت v حرکت می‌کنند. با توجه به‌ناوردا بودن رویدادها در S' و Π'، باید در چارچوب مرجع لخت K هم اتفاق بیفتند (زیرا، در چارچوب مرجع لخت K' اتفاق افتاده‌اند). در ضمن در S'، رویداد گسیل، و در Π' رویــداد دریافت پیش می‌آید، ولی این، تنها وقتی‌ممکن است‌که داشته باشیم:، $v<c$ (زیرا، درغیراین‌صورت، سیگنال‌مبنا به‌گیرندهٔ Π' نمی‌رسد ورویداد ــ دریافت سیگنال درچارچوب مرجع لخت K ــ هرگز اتفاق نمی‌افتد، امــری‌کــه با ناوردایی رویدادها تناقض دارد). از همین بحث نتیجه می‌شود که بــرابــری $v=c$ نمی‌تواند تحقق یابد.

بــه‌این ترتیب، اصل موضوع $v<c$ (کــه درآن، v عبارت است از سرعت‌نسبی دوچارچوب مرجع لخت) به‌این معناست‌که: سرعت همهٔ جسم‌ها و ذره‌هایی‌که می‌توانند به چارچوب مرجع لخت وابسته باشند، از طرف‌بالا، با سرعت سیگنال مبنا محدود می‌شوند (ازبالا و به‌وسیلهٔ سرعت مبنا، که خود متناهی است).

۶.۲. دریك تجربهٔ ذهنی (شکل ۳۶ را ببینید) فرض می‌کنیم:$v>c$. آیا در این صورت، می‌تــوان پدیدهٔ گسیل و دریافت مبنا را در چارچوب مرجع لخت K بــه‌نحوی توضیح دادکه با اصل ناوردائی رویداد و اصل علیت سازگارباشد، بنابر اصل اول، رویداد برای همهٔ چارچوب‌های‌مرجع لخت، حقیقتی مطلق است؛ بنابر اصل دوم ، ترتیب رویدادها از نظر زمانی،

امری ناورداست (در همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، علت پیش از معلول است).

اگر در چارچوب مرجع لخت K رویداد، ابتدا در Π' و سپس در S' اتفاق بیفتد و، در ضمن، اولـی گسیل (علت) و دومی دریافت (معلول) باشد، هر دو اصل رعایت شده است (خود S'، که سرعت آن در چارچوب مرجع لخت K برابر $c > v$ است، به‌سیگنال می‌رسد!) (شکل ۳۷). در این طـرح ، هیچ تناقض منطقی وجـود ندارد. این‌که آیا وجود آن با واقعیت سازگار است یا نه، مسألهٔ دیگری است.



شکل ۳۷

فرض $c > v$ را می‌توان، به‌عنوان اصل موضوع سوم (به‌جای $c > v$ که اینشتین فرض کرده است) پـذیـرفت و همراه با بقیهٔ اصل موضوع‌ها، نظریهٔ نسبیت تازه‌ای ساخت که، معمولاً، آن را نظریهٔ نسبیت فـوق نوری می‌نامند. انیشتین تنها یکی از امکان‌ها، یعنی $c > v$ را درنظر گرفت. درواقع، نظریهٔ نسبیت‌خاص او، نظریهٔ نسبیت زیرنوری است. اختلاف اولیهٔ این دو نظریهٔ نسبیت، در اصل موضوع سوم است که البته، در نتیجه‌های حاصل از مجموعهٔ همهٔ اصل موضوع‌ها هم ظاهر می‌شود. هر دو نظریهٔ نسبیت منطقی‌و بی‌تناقض‌اند، ولی دست‌کم در زمان ما، نظریهٔ نسبیت فوق نوری، تنها یك ساختار خالص نظری است و نمی‌توان پیش‌بینی کرد که آیا روزی کاربرد پیدا می‌کند یا نه!

۰۷۰۲ با توجه به‌اصل موضوع چهارم، نظریهٔ نسبیت خاص (همگنی‌و همسانگردی فضا در چارچوب مرجع لخت)، بـه‌طور طبیعی، موجب فرض

همسانگردی سرعت مبنا، یعنی برابری آن در همهٔ جهت‌ها، می‌شود. چون $c = \mathrm{inv}$، این ویژگی همسانگردی هم، ناورداست، که با نظام نسبیت (که برهم ارزی کامل فیزیکی همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت تأکید دارد) سازگار است.

از آن جا که فضا و زمان، در چارچوب مرجع لخت، همگن‌اند (اصل موضوع‌های چهارم و پنجم نظریهٔ نسبیت خاص)، بنابراین، سرعت مبنا، به‌خاطر «برابر حقوقی» همهٔ نقطه‌های فضا و همهٔ لحظه‌های زمان، نمی‌تواند تابعی از x، y، z یا t باشد. به‌این ترتیب، در هر چارچوب‌مرجع لخت، داریم: $c = \mathrm{const}$.

همان‌طور که در بالا ثابت کردیم (۵۰۲ را ببینید)، سرعت مبنای c، برای همهٔ جسم‌ها و ذره‌هایی که می‌توان چارچوب مرجع لخت را به‌آن‌ها متصل کرد، سرعتی است که از بالا محدود است. از همین جا، مشخص بودن این سرعت مبنا، نتیجه می‌شود، زیرا، تنها یك حد (بالا) می‌توان داشت.

۸۰۲. فرض کنید، سیگنال مبنا در چارچوب مرجع لخت K، از نقطهٔ O به‌سوی نقطهٔ A گسیل شود و بعد از بازتاب (به‌کمك یك وسیلهٔ خاص)، در جهت عکس برگردد. برای این که سرعت سیگنال را در جهت O به A اندازه بگیریم، باید دو ساعت هم‌زمان به‌ترتیب در هر یك از این نقطه‌ها داشته باشیم. ولی هم‌زمان کردن ساعت‌ها، با استفاده از سیگنال و، بنابراین، با معلوم بودن سرعت مسیر است. به این ترتیب دور باطلی پدید می‌آید که، در نتیجه، عدم امکان اندازه‌گیری سرعت مبنا را، دریك جهت، ثابت‌می‌کند.

اگر زمان حرکت سیگنال را از O به A و، سپس، از A به O، تنها به‌کمك ساعت نقطهٔ O اندازه‌گیری کنیم، (این زمان‌را τ می‌نامیم) آن‌گاه‌از تجربه به دست می‌آید: $«c» = \frac{2|OA|}{\tau}$ (‌«c»، سرعت‌متوسط‌حرکت سیگنال مبنا، درمسیر«رفت‌وبرگشت» است). ازهمسانگری فضا،می‌توان همسانگردی سیگنال مبنا را نتیجه گرفت و در این صورت: $c = «c»$. گزارهٔ مربوط به برابری سرعت «رفت» و سرعت «برگشت»، یك فرض فیزیکی (اصل

موضوع) است و نمی‌توان آن را، بــه‌کمك تجربه، ثابت‌کرد (برای اثبات همسانگردی فضا، باید از همسانگردی سیگنال مبنا استفاده‌کرد و، برعکس، همسانگردی مبنا، موکول به‌همسانگردی فضا می‌شود).

۰۹۰۲ درنظریهٔ نسبیت‌کلاسیك، $c = \mathrm{inv} = \infty$ را به‌عنوان سرعت مبنا می‌پذیرند، البته درفیزیك‌کلاسیك، هرگزکسی نتوانست، این سرعت را، به طریق تجربــی بــه‌دست‌آورد. بنابراین، حکم $c = \mathrm{inv} = \infty$ در مدل نیوتونی طبیعت، تنها یك فرض بود و تا حد معینی می‌توانست حقیقت واقع را منتزع و منعکس‌کند. همان طورکــه از شرح بعدی دربارهٔ نظریهٔ نسبیت خاص روشن خواهد شد، این فرض به ایــن خاطر می‌تواند درست باشدکه، سرعت مبنا را، می‌توان در مقایسه با سرعت‌کم حرکت ذره‌ها و فرایندهایی که در فیزیك کلاسیك مورد مطالعه قرار می‌گیرد، بی‌نهایت‌گرفت.

درفیزیك نسبیتی،که برشالودهٔ نظریهٔ نسبیت خاص قرار دارد،سیگنال مبنا ($c = \mathrm{inv} < \infty$)، منشاء مستقیم تجــربــی دارد. معلوم شده است‌که موج الکترومغناطیسی (و در حالت خاص، نور) با سرعتی ثابت برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، در خلاء منتشر می‌شود. بنابراین، سرعت مبنای $c = ۳ \times ۱۰^{۸}$ (متر در ثانیه)، ضمن عمل و در نظریهٔ الکترومغناطیس (یك پدیدهٔ مشخص فیزیکی) به‌دست می‌آید.

با وجود این، از جائی نمی‌توان نتیجه گــرفت‌کــه تنها سرعت نور دارای ویژگی سرعت مبناست. مثلاً ذره‌های نوترینو نیز با سرعت c حرکت می‌کنند. دلیل‌هایی برای این‌فرض وجود داردکه، عمل‌گرانش هم، با همین سرعت منتشر می‌شود.

بر اساس نظریهٔ عام فیزیکی، نمی‌توان بر یك پدیدهٔ مشخص فیزیکی (و مثلاً نور) تأکید گــذاشت. در اصل دوم نظریــهٔ نسبیت خــاص، قبل از هر چیز به‌طورکلی دربارهٔ وجود سرعت مطلق جهانی صحبت می‌شود و این که، این سرعت مطلق، برای هر فرایندی، سرعت حدی و، بنابراین، سرعت مبنا است.

به‌این ترتیب، در نظریهٔ نسبیت خاص و نتیجه‌های ناشی از آن، c را

نه به عنوان سرعت نور، بلکه به عنوان کمیت مبنای عام در نظر می‌گیرند: $c = \mathrm{inv} < \infty$. با ایـن شیوه، می‌تـوان نظریهٔ نسبیت کلاسیك و فیزیك کلاسیك را با نظریهٔ نسبیت خاص و فیزیـك نسبیتی، بـه‌ازای عبور حدی $c \to \infty$، مقایسه کرد (اگر c را، در نظریه، سرعت نور بگیریم ،آن وقت $c \to \infty$ بی‌معنا می‌شود، زیرا قبل از پیدایش نظریهٔ نسبیت خاص، سرعت نورمعلوم بود وآن را مقداری متناهی (اگرچه وردا) به‌حساب می‌آوردند).

۱۰۱۰۰۲الف) مبنای آزمایشی اصل $c = \mathrm{inv} < \infty$، مبتنی برنکته‌های زیر است: الف) یکی کردن سیگنال مبنا با یك فرایند فیزیکی مشخص؛ ب) تحقیق آزمایشی $c < \infty$،یعنی اثبات متناهی‌بودن سرعت c، دریك چارچوب مرجع لخت مفروض؛ ج) مقایسهٔ مقدارهای c درچارچوب‌های مختلف(برای تأکید بر مطلق‌بودن آن).

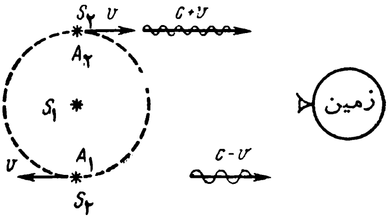
نور را به‌عنوان یك پدیده، از زمان‌های باستانی می‌شناخته‌اند. ابتدا گمان می‌کردندکه انتشار آن آنی است، یعنی برای رسیدن از نقطه‌ای‌به‌نقطهٔ دیگر، نیازی به‌زمان ندارد. تنها در سال ۱۶۷۶ بودکه رئومر، اخترشناس دانمارکی، ضمن مشاهدهٔ گرفتگی قمر مشتری، متناهی بودن سرعت نور را ثابت‌کرد وآن را ۲۱۵۰۰۰ کیلومتر در ثانیه به‌دست‌آورد.

درسال ۱۸۵۰، فیزو، فیزیك‌دان فرانسوی، با قطع پرتونور (به‌کمك چرخ دندانه‌دارچرخان)، برای نخستین بارتوانست سرعت نور را درشرایط آزمایشگاهی پیـدا کند. او سرعت نـور را ۳۱۳۰۰۰ کیلومتـر در ثانیه برآوردکرد.

بنابر اندازه‌گیری‌های امروزی معلوم شده است‌که:

$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \pm ۱۲^{m}/_{sec}$$

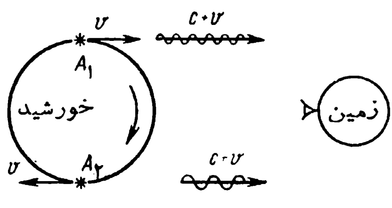
مطلق بودن سرعت سیگنال نوری را می‌تـوان با مشاهدهٔ ستاره‌های دوتایی تأیید کرد (هر دو ستاره، دور مرکز جرم کل می‌چرخند). اگر جرم یکی از ستاره‌ها خیلی بیشتر از جـرم دیگـری باشد، می‌توان فرض‌کردکه ستارهٔ دوم دور ستارهٔ اول می‌چرخد (شکل ۳۸). فرض می‌کنیم $c \neq \mathrm{inv}$، یعنی سرعت نور، بستگی به‌سرعت چشمهٔ آن داشته باشد، در ایـن صورت، سرعت موج نوری که از ستارهٔ درحال‌گردش گسیل می‌شود، در موقعیت A_1



شکل ۳۸

برابر $c-v$ و در موقعیت A_2 برابر $c+v$ خواهد بود، که در آن، c سرعت نور درچارچوب مرجع چشمه (یعنی ستاره) و v سرعت‌ستاره است. اگرستاره در لحظهٔ t_1 درموقعیت A_1 ودرلحظهٔ t_2 در موقعیت A_2 باشد، آن وقت، ناظر روی‌زمین، بایدستاره‌ها را دراین‌دوموضع، با تلسکوپ به‌ترتیب در لحظه‌های $T_1=t_1+\frac{L}{c-v}$ و $T_2=t_2+\frac{L}{c+v}$ مشاهده کند. که در آن‌ها، L، فاصلهٔ تا ستاره‌های دوتائی است. روشن است که، به‌ازای مقدارهای معینی از Lو v، می‌توانیم داشته باشیم: $T_1=T_2$، یعنی ستاره در یك زمان، درچند نقطه از مدار خود مشاهده شود. ولـی در واقع، اخترشناسی ستاره‌های دوتائی، آگاهی دیگری بـه‌ما می‌دهد: در زمینهٔ دیـد تلسکوپ، دو ستاره به‌روشنی تشخیص داده می‌شوند و حرکت آن‌ها، بدون هیچ گونه اثر نوری عجیب و غریبی، ادامه پیدا می‌کند.

در سال ۱۹۵۵ ، آ.م. بونچ برویه‌ویچ، فیزیك‌دان شوروی، آزمایش مستقیمی برای تحقیق مطلق بودن سرعت نور طرح ریخت. او به مطالعهٔ این مطلب پرداخت که: آیا بین سرعت دو موج نوری که به ترتیب از دو چشمهٔ متحرك خارج می‌شوند ـ دوچشمه‌ای که دردو انتهای قطری ازقرص‌خورشید قرار دارند (شکل ۳۹) ـ تفاوتـی وجـود دارد یا نه؟ اگـــر سرعت نور



شکل ۳۹

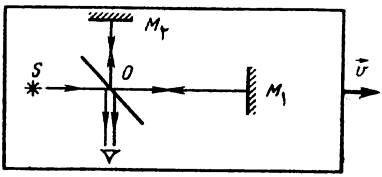
در چارچوب مرجع لخت خورشید c باشد، آن وقت بنا بر قانون کلاسیك تبدیل سرعت‌ها، باید سرعت موجی از نور کــه از نقطهٔ A_1 گسیل می‌شود، $c_1 = c + v$، وسرعت موجی که ازنقطهٔ A_2 گسیل می‌شود، $c_2 = c - v$ باشد (نقطهٔ A_1 به‌سوی ناظرزمینی ونقطهٔ A_2 به‌سوی مخالف آن، با سرعت $v = 2$ (کیلومتر در ثانیه)، بــه علت چرخش خورشید، حرکت می‌کند). آزمایش پاسخ منفی می‌دهد: اختلافی برای دو سرعت نور (یعنی نابرابری $c_1 \neq c_2$) پیدا نشد. می‌توان، ضمن قرارهای معینی (مثلاً، در حالت کوتاه بودن زمان آزمایش)، چارچوب مرجع لخت را به‌زمین، به‌عنوان جسم مرجع، مربوط کرد. از آن جا کــه در چارچوب مرجع خورشید، زمین در جهت مخالف سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند (تغییر قدرمطلق آن ناچیزاست). بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که بعد از نیم سال، دو چارچوب مرجع لخت مختلف (که آن‌هارا K_1 و K_2 می‌نامیم)، بههم مربوط می‌شوند. اگر داشته باشیم: $c \neq \mathrm{inv}$، آن وقت بنابر تعریف سرعت نور (مثلاً، آزمایش فیزو)، باید آزمایش‌هایی که بعد ازگذشت نیم سال در آزمایشگاه انجام می‌شوند، به‌نتیجه‌های‌مختلفی منجر شوند، چیزی که درعمل، پیش نمی‌آید. این هم، تأکید دیگری بر این حکم است که: $c = \mathrm{inv}$.

ب) درآزمایشگاه زمینی ــ کــه در واقع در لحظه‌های مختلف زمان، چارچوب‌های مرجع لخت مختلفی است (مثلاً K_1 و K_2)ـ همهٔ تجربه‌هــا و همهٔ پدیده‌هــا، بــه‌صورتی یکسان و مستقل از زمانی که مورد بررسی قرار گــرفته‌اند جریان پیدا می‌کنند: در ماه مه یا ژانویه (البته، بــا این فــرض کــه سایر شرایط فیزیکی، یکسان بــاشند) و بــه این ترتیب، اصل نسبیت اینشتین ــ نخستین اصل نظریهٔ نسبیت خاص ــ به طور آزمایشی پایه‌گذاری می‌شود.

می‌توان ازآزمایش ویژهٔ مایکلسون و مورلی امریکایی نام برد، که در سال ۱۷۷۸ صورت گــرفت و تــأییدی بر همین مطلب است. درآزمایش، سرعت‌های دوموج نوری باهم مقایسه می‌شوند، که ازیك چشمهٔ ساکن‌زمینی گسیل می‌شوند و در دوجهت عمود برهم حرکت می‌کنند، به‌نحوی که یکی

از این جهت‌ها بــر جهت سرعت مداری زمین ($v = ۳۰$ کیلومتر در ثانیه) منطبق باشد.

روی تختهٔ چدنی بزرگی که در جیوه شناور است، چشمهٔ S، صفحهٔ نیم‌شفاف O و دو آئینهٔ $M_۱$ و $M_۲$ سوار شده است (شکل ۴۰). اختلاف سرعت‌های دو موج نوری و مسیر انتشار آن‌ها، باید بر نقش تداخلی ناشی از برخورد پرتوهای نور، بعد از بازتاب از آئینه‌ها، اثر بگذارد. در ضمن اگر $|OM_۲| = |OM_۱|$، آن وقت با چرخاندن تمامی دستگاه به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$، باید تغییر مکان نقش تداخلی، نمایانگر اختلاف سرعت‌های دو موج نوری باشد. ولی، در آزمایش، چنین تغییر مکانی پیش نمی‌آید، یعنی سرعت نور، همسانگرد (ایزوتروپیك) از آب درمی‌آید (همسانگرد، یعنی یکسان در همهٔ جهت‌ها).



شکل ۴۰

آزمایش مایکلسون ــ مــورلــی، در زمان‌های مختلف سال، یعنی در چارچوب‌های مرجع لخت مختلف $K_۱$ و $K_۲$، انجام و همیشه به‌نتیجهٔ (منفی) یکسانی‌منجر شد. بنابراین، نتیجه‌گیری‌مربوط به‌همسانگردی‌سرعت‌نور، باید به‌عنوان خصلتی ناوردا و بی‌تغییر در نظر گرفته شود.

از آن‌جا که ایــن آزمایش، امکان تمیز چارچوب مرجع لخت $K_۱$ را از چارچوب مرجع لخت $K_۲$، به کمك پدیدهٔ نوری، فراهم نمی‌آورد، بنابراین، اصل نسبیت اینشتین هم، مورد تأیید قرار می‌گیرد.

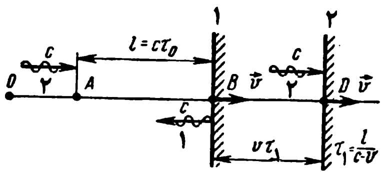
۱۱۰۲. فاصلهٔ از محل روشن‌کــردن نــورافکن تا ایستگاه A را، x می‌گیریم، داریم:

$$\frac{l-x}{v}-\frac{l-x}{c}=\tau \Rightarrow x=l-\frac{vc}{c-v}\tau$$

چون $x>0$، بنابراین داده‌های مسأله، باید باشرط $l>\frac{vc}{c-v}\tau$ سازگار باشند.

۱۲۰۲. اگـر جسم آسمانی نسبت بـه نقطهٔ O ساکن باشد، دو تپ الکترومغناطیسی درهمان فاصلهٔ زمانی τ_0، که به‌طرف جسم فرستاده شده‌اند، به‌آن می‌رسند. ولی به‌خاطر حرکت جسم آسمانی با سرعت v (شکل ۴۱)، تپ دوم باید (از لحظهٔ بازتاب تپ اول) به‌اندازهٔ زمان $\frac{2v\tau_1}{c}$ نسبت به τ_0، وقت بیشتری صرف کند (دراین‌جا، $v\tau_1$، فاصلهٔ BD است که بازتاب به‌اندازهٔ آن جا به‌جا می‌شود. جسم آسمانی وقتی با تپ دوم برخورد می‌کند که مسیر از A تا D را طی کرده باشد: $\tau_1=\frac{c\tau_0}{c-v}$). بنابراین، فاصلهٔ زمانی برگشت تپ به‌نقطهٔ O، برابر است با $\tau=\tau_0+\frac{2v\tau_1}{c}$ ویا سرانجام

$$\tau=\tau_0\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\ ,\quad \beta=\frac{v}{c} \qquad (1)$$



شکل ۴۱

بنا بر شرط داریم: $\frac{\tau_0}{\tau}=0/5$؛ از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود: $v=\frac{1}{3}c$.

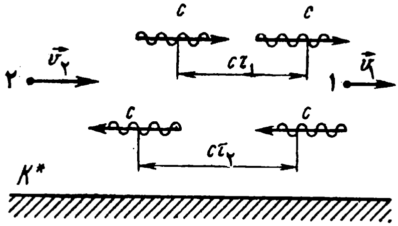
درحالتی که‌جسم آسمانی نزدیك می‌شود، به‌همین‌ترتیب به‌دست‌می‌آید:

$$\tau=\tau_0\ \frac{1-\beta}{1+\beta} \qquad (2)$$

۱۳۰۲. با تـوجـه بـه‌نتیجهٔ (۱) از مسألهٔ ۱۲۰۲، دو تپ در فاصلهٔ زمانی $\tau_2=\tau_1\cdot\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}$، ازسفینهٔ اول بازتابیده می‌شوند (شکل ۴۲)، که

در آن، $\beta_1=\frac{v_1}{c}$. اکنون اگـر از رابطهٔ (۲) در مسألهٔ **۱۲.۲** استفاده کنیم، معلوم می‌شود که آن‌ها، در جهت عکس، با اختلاف زمانی زیر به‌سفینهٔ دوم می‌رسند:

$$\tau=\tau_2\cdot\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}\quad,\quad \beta_2=\frac{v_2}{c}$$



شکل ۴۲

به‌این ترتیب، فاصلهٔ زمانی مورد نظر برابر است با

$$\tau=\tau_1\cdot\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\cdot\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}\qquad (1)$$

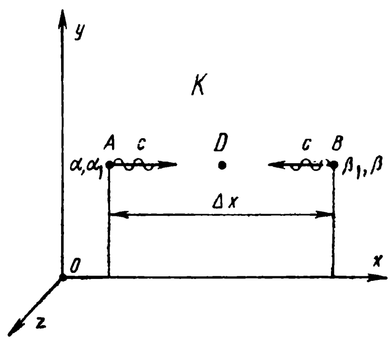
۱۴.۲. مسأله را در چارچوب مرجع سفینهٔ فضایی حل می‌کنیم (در این چارچوب، سیارك با سرعت v بـه‌سفینهٔ ساکن نزدیك می‌شود)، در این صورت، $\tau_1=\frac{l}{c+v}$، عبارت است از زمان‌حرکت سیگنال تا سیارك. چون بازتاب سیگنال، درهمان‌فاصلهٔ زمانی حرکت‌می‌کند، یعنی $\tau_2=\tau_1$، بنابراین زمان‌کلی برای دریافت سیگنال به‌وسیلهٔ رادار، برابر است با

$$\tau=\tau_1+\tau_2=\frac{2l}{c+v}$$

باگذشت زمان τ، فاصلهٔ بین‌سفینه وسیارك، برابر $l-\frac{2l}{c+v}v$ می‌شود تا لحظهٔ برخورد (از لحظهٔ دریافت سیگنال به‌وسیلهٔ رادار)، به اندازهٔ زمان $\tau_c=\frac{l}{v}\left(\frac{c-v}{c+v}\right)$ بـاقی مانده است. برای این‌که حادثه‌ای پیش نیاید (و فرمانده بتواند مانور بدهد)، باید داشته باشیم: $\tau_c\geqslant\tau$، یعنی

$$l \geqslant v\tau\left(\frac{c-v}{c+v}\right)$$

۱۵۰۲. برقراری هم‌زمانی، برای رویدادهایی که در نقطه‌های مختلف چارچوب مرجع لخت مفروض K اتفاق افتاده‌اند، هم‌ارز است با مسألهٔ هم‌زمان‌سازی ساعت‌ها، که در مسألهٔ **۲۰۲** موردبررسی قرار گرفت. درواقع، اگر این ساعت‌ها (هر دو، همیشه یك زمان را نشان می‌دهند) که در محل رویدادها واقع‌اند، یك زمان را نشان دهند، روشن است که رویدادها هم‌زمان‌اند.



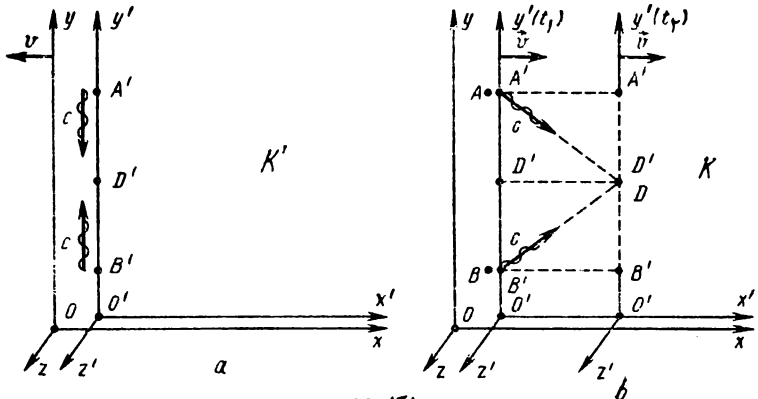
شکل ۴۳

فرض کنید رویدادهای α و β، به ترتیب در نقطه‌های A و B، که به فاصلهٔ Δx از یکدیگر واقع‌اند، اتفاق بیفتد (شکل ۴۳). در نقطهٔ $D(|AD|=|DB|)$ ناظری قرارمی‌دهیم که، از این به‌بعد، آن را به‌عنوان یك وسیله به حساب می‌آوریم. سپس فرض می کنیم، ضمن رویدادهای α و β، در همین نقطه‌ها، رویدادهای α_1 و β_1 هم اتفاق بیفتند، که عبارتند از گسیل سیگنال مبنا به سوی ناظر (در نقطهٔ D). اگر دو سیگنال به طورهم‌زمان به ناظر برسند، به‌معنای آن است که رویدادهای α_1 و β_1 هم زمان‌اند. ولی چون $\alpha \equiv \alpha_1$ و $\beta \equiv \beta_1$ (از نقطه نظر مفهوم رویدادها)، بنابراین، رویدادهای α و β نیز، هم زمان خواهند بود. چنین است تعریف اینشتین از هم‌زمانی رویدادهایی که از نظرفضایی از یکدیگر جدا هستند. این، تعریفی

عام برای همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت است، زیرا با توجه به $c=\mathrm{inv}$، می‌تواند به‌صورتی مطلق، درهرچارچوب مرجع لخت، تحقق پذیرد.

۱۶۰۲. وقتی دو رویداد به‌طور هم‌زمان در نقطه‌ای از یك چارچوب مرجع لخت اتفاق بیفتند، در چارچوب مرجع لخت دیگر نیز، هم‌زمان‌وهم‌مکان‌اند. در واقع، بنابر تعریف رویداد، دو رویداد مفروض متحد یکریگرند وهمیشه می‌توان آن‌ها را، هم‌ارز با یك رویداد به‌حساب آورد. روشن‌است که، عکس‌این‌مطلب هم‌درست است و، بنابراین، با توجه به‌ناوردایی‌رویداد، به‌این نتیجه می‌رسیم که باید، به‌پرسش مسأله، پاسخ مثبت داد.

۱۷۰۲. در چارچوب مرجع لخت K' (شکل a–۴۴)، دو رویداد α' و β'، به‌طور هم‌زمان، به ترتیب در نقطه‌های A' و B' اتفاق می‌افتند. بنابر



شکل ۴۴

تعریف‌اینشتین‌ازهم‌زمانی، نتیجه‌می‌گیریم که، اگر سیگنال‌های مبنا ازنقطه‌های A' و B' (ضمن پیش آمدن رویدادهای α' و β') به‌سمت نقطهٔ D' (که در وسط پاره‌خط $A'B'$ قراردارد) گسیل شود، به‌طور هم‌زمان به D' می‌رسند. ولی در مسألهٔ **۱۶۰۲** ثابت کردیم که همین حکم دربارهٔ چارچوب مرجع K هم درست است. ازآن‌جا که نقطهٔ D' نسبت به‌دونقطهٔ A' و B' متقارن‌است و در امتداد سرعت نسبی قرار دارد، بنابراین، براساس تعـریف هم زمانی، می‌توان نتیجه گرفت که رویدادهای α' و β' در چارچوب مرجع لخت K نیز، هم‌زمان‌اند (شکل ۴۴–b).

۱۸۰۲. ناظر ۲، درچارچوپ مرجع لخت K به‌سوی سیگنالی‌می‌رود که از A گسیل شده است؛ سیگنال دیگرکه از B گسیل می‌شود، ناظر ۲ را تعقیب‌می‌کند. بنابراین ناظر ۲ درخشش‌ناشی از درخت A را زودترمی‌بیند.

در چارچوب مرجع خاص ناظر ۲، یعنی چارچوب مرجع لخت K'، دوسیگنال به طورهم‌زمان به‌اونمی‌رسند؛ این‌را، می‌توان براساس نتیجه‌گیری مسألهٔ ۱۰۰۲ ، و با بحثی درجهت عکس آن، نتیجه‌گرفت.

بنابراین، جواب مسألهٔ ۳۶۰۱ ، ارتباطی به روش حل (نظریهٔ نسبیت کلاسیك یا نظریهٔ نسبیت خاص) ندارد.

۱۹۰۲. رویداد ــ یعنی پرواز پرنده از قفس ــ در هر دوچارچوب مرجع لخت K و K' (با توجه به‌ناوردائی رویداد) پیش می‌آید. بنابراین، هم زمانی رسیدن دوسیگنال به در قفس، ناوردا است (۱۶۰۲ را ببینید). در این‌صورت، برای‌چارچوب مرجع لخت K، زمان گسیل سیگنال‌ها از A و B (شکل ۴۴ــb را ببیند)، به‌ترتیب برابرند با

$$\tau_1=\frac{|A'D'|_k}{c-v}\,,\qquad \tau_2=\frac{|B'D'|_k}{c+v}$$

که در آن‌ها $|A'D'|_k$ و $|B'D'|_k$ به ترتیب طول پاره خطهای $A'D'$ و $B'D'$ درچارچوب مرجع لخت K هستند. چون دو سیگنال، هم‌زمان به‌D' (قفس) می‌رسند (در چارچوب مرجع لخت K)، ولی $\tau_2\neq\tau_1$، بنابراین، رویدادگسیل سیگنال از نقطهٔ A' باید زودتر از رویدادگسیل سیگنال از نقطهٔ B' اتفاق بیفتد. اختلاف زمان برابراست با

$$\tau=\tau_1-\tau_2=\frac{v}{c^2}\cdot\frac{|A'B'|_k}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1}$$

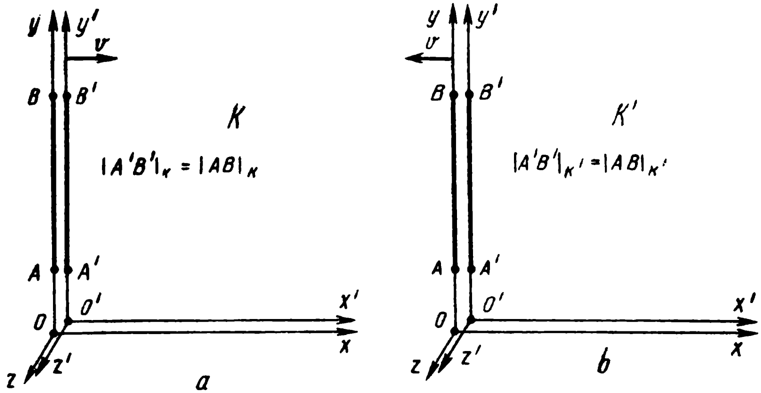
رابطهٔ (۱) را، رابطهٔ «ناهم‌زمانی» گویند، که این‌طور بیان می‌شود: اگر در چارچوب مرجع لخت K' (که پاره‌خط $A'B'$ درآن ساکن است) در نقطه‌های A' و B' ، رویدادهای متناظری به‌طور هم‌زمان پیش آید، آن وقت در چارچوب مرجع لخت K (که در آن، $A'B'$ با سرعت $\vec{v}\parallel A'B'$ حرکت می‌کند) ، رویداد نقطهٔ A' قبل از رویداد نقطهٔ B' اتفاق می‌افتد و ،

در ضمن، اختلاف زمان برابر است با τ.

۲۰۰۲. فرض کنید پاره خط $A'B'$، که درچارچوب مرجع لخت K' کاملاً به‌آن وابسته است، نسبت به چارچوب مرجع لخت K، به نحوی که درشکل a–۴۵ نشان داده شده است، حرکت کند. دریك لحظه درچارچوب مرجع لخت K، دو رویداد به‌طور هم زمان اتفاق می‌افتد: (A', A) و (B', B): انطباق متناظر نقطه‌های A' و B' از چارچوب مرجع لخت K' با نقطه‌های A و B از چارچوب مرجع لخت K. در این صورت می‌توان نوشت:

$$|A'B'|_k = |AB|_k \qquad (۱)$$

یعنی طول پاره‌خط $A'B'$، که درچارچوب مرجع لخت K حرکت می‌کند، برابراست با طول پاره خط AB، که درهمین چارچوب مرجع ساکن‌است. در این‌جا، از تعریف طول پاره خط متحرك در نظریهٔ نسبیت خاص استفاده کردیم، ولی این تعریف، به‌طور کامل، برتعریف اینشتین منطبق است.



شکل ۴۵

پاره خط AB، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، حرکت می‌کند (شکل b–۴۵)، ولی‌رویدادهای (A', A) و (B', B)، مثل قبل، هم‌زمان‌اند. یعنی در چارچوب مرجع لخت K' داریم:

$$|AB|_{k'} = |A'B'|_{k'} \qquad (۲)$$

اگر فرض کنیم طول پاره‌خط متحرك؛ باطول همین پاره خط درحالت سکون با ضریبی مثل α مربوط باشد (درضمن، به‌دلیل همگنی وهمسانگردی فضا : $\alpha = \text{const}$)، یعنی داشته باشیم:

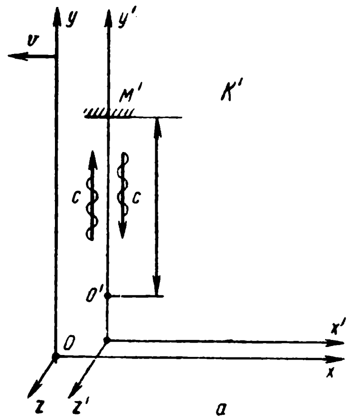
$$|A'B'|_k = \alpha |A'B'|_{k'} \ , \ \ |AB|_{k'} = \alpha |AB|_k$$

آن وقت، با توجه به (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\alpha |A'B'|_{k'} = |AB|_k \ , \ \ \alpha |AB|_k = |A'B'|_{k'}$$

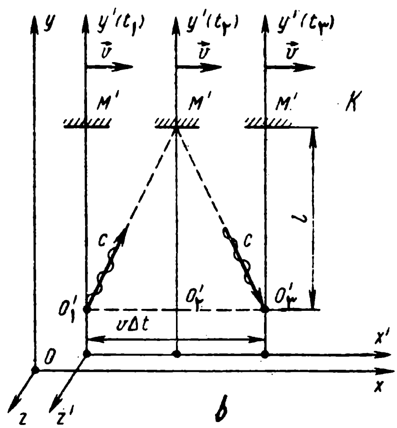
که از آن‌جا به دست می‌آید : $\alpha = 1$ و بنابراین $|A'B'|_k = |A'B'|_{k'}$ و $|AB|_{k'} = |AB|_k$ ویا به‌صورت نمادی

$$l_\perp = \text{inv} \qquad (۳)$$



شکل ۴۶-a

۲۱۰۲. از نقطهٔ O' درچارچوب مرجع لخت K'، با اختلاف‌زمانی $\Delta t'$، دو رویداد دلخواه اتفاق‌می‌افتد. پاره‌خطی عمود برامتداد بردارسرعت $\vec{v}$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۴۶-a) و l'، طول آن را، طوری می‌گیریم که اگر سیگنال مبنا را در لحظهٔ اتفاق رویداد اول از نقطهٔ O' گسیل‌کنیم، بعد ازآن‌که به‌وسیلهٔ آئینهٔ نقطهٔ M'، انتهای پاره‌خط، بازتابیده شود، در لحظهٔ اتفاق رویداد دوم، به‌نقطهٔ O' برگردد. در این صورت $\Delta t' = \frac{2l'}{c}$.



شکل ۴۶-b

درچارچوب مرجع لخت K، نقطه‌های O' و M'، به‌سرعت vحرکت می‌کنند. اصل ناوردایی رویداد، ساختار شکل ۴۶ـb را روشن می‌کند که، به‌اعتبار آن، نقطه‌های $O'_{۱}$، $O'_{۲}$و $O'_{۳}$، موضع‌های متوالی نقطهٔ O' درلحظه‌های مختلف‌اند.

چون $v\frac{\Delta t}{۲}=|O'_{۲}O'_{۳}|=|O'_{۱}O'_{۲}|$، که درآن، Δt زمان گسیل سیگنال از O' بـه M' و بـرعکـس است، ولی $c\frac{\Delta t}{۲}=|M'O'_{۳}|=|O'_{۱}M'|$ و $l=l'$ ($l_\perp=\text{inv}$)، بنابراین بنابر قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$\left(c\frac{\Delta t}{۲}\right)^{۲}=\left(v\frac{\Delta t}{۲}\right)^{۲}+l'^{۲}$$

که اگر درآن قرار دهیم. $l'=c\frac{\Delta t'}{۲}$، به‌دست می‌آید:

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}$$

Δt و $\Delta t'$ عبارتند از فاصلهٔ زمانی بین دو رویـداد مفروض بـه ترتیب، در

چارچوب‌های مرجع لخت K و K'.

اگر نام‌گذاری‌های جدید $\Delta t' = \tau_0$ و $\Delta t = \tau$ را بپذیریم، سرانجام حاصل می‌شود:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌این ترتیب بیان کرد: اگر τ_0 فاصلهٔ زمانی بین دو رویداد در چارچوبی باشد که رویدادها در آن در یك نقطه اتفاق افتاده‌اند، و τ، فاصلهٔ زمانی بین همان دو رویداد در چارچوب مرجع لخت دیگری باشد (که البته، در نقطه‌های مختلف اتفاق افتاده‌اند)، آن‌وقت $\tau > \tau_0$ و τ برابراست با $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ برابر τ_0.

۲۲۰۲. فرض‌کنیم، در چارچوب مرجع لخت K'، در فاصلهٔ زمانی $\Delta t'$، دو رویداد α'_1 و β'_1 به‌ترتیب درنقطه‌های A' و B'، دوانتهای پاره‌خط $A'B'$، که بر امتداد سرعت بردار $\vec{v}$ عمود است، اتفاق بیفتند. همچنین فرض می‌کنیم، رویدادهای α'_2 و β'_2 در نقطهٔ O' از پاره خط $A'B'$ اتفاق افتاده باشند و درضمن، α'_1 با α'_2 و β'_1 با β'_2 هم‌زمان باشند. به‌این ترتیب، فاصلهٔ زمانی بین رویدادهای α'_2 و β'_2 نیز برابر $\Delta t'$ می‌شود.

نسبت به‌چارچوب مرجع K (حل مسأله **۱۷۰۲** را ببینید)، α_1 با α_2 و β_1 با β_2 هم‌زمان‌اند (در این جا α_1، β_1، α_2، β_2 همان رویدادهای α'_1، β'_1، α'_2، β'_2 در چارچوب مرجع لخت K هستند). در این صورت، فاصلهٔ زمانی بین‌رویدادهای α_2 وβ_2 برابرΔt، یعنی همان فاصلهٔ زمانی‌رویدادهای α_1 و β_1 می‌شود.

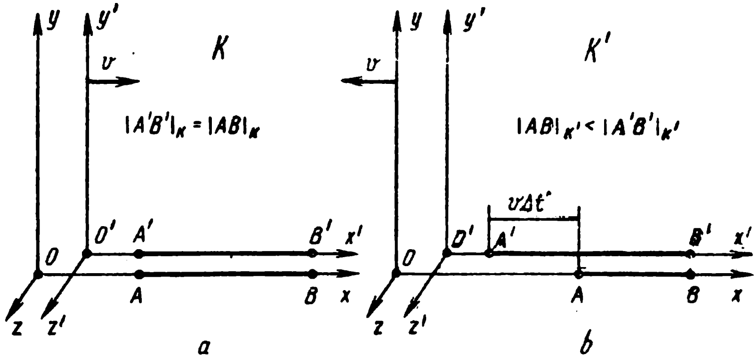
چون رابطهٔ (۱) درمسألهٔ **۲۲۰۲** را می‌توان دربارهٔ رویدادهای(α'_2 و β'_2) و (α_2 ، β_2) به کار برد، درستی آن برای رویدادهای (α'_1 ، β'_1) و (α_1 ، β_1) هم محقق می‌شود.

۲۳۰۲. بنا به فرض $|A'B'|_K = l_0$ طول پاره‌خط $A'B'$ در حالت سکون است. در چارچوب مرجع لخت K، در لحظهٔ دلخواهی، به‌طور

هم‌زمان، موضع دو انتهای پاره‌خط را تعیین می‌کنیم و مقدار

$$|A'B'|_K = |AB|_K = l$$

طول پاره خط متحرك $A'B'$ را (بنابه تعریف اینشتین) به دست می‌آوریم (شکل ۴۷-a).



شکل ۴۷

به‌چارچوب مرجع لخت K'، کـه پاره‌خط AB نسبت به‌آن متحرك است، می‌رویم (شکل ۴۷-b) و به‌بررسی رویدادهایی می‌پردازیم که، به‌طور هم‌زمان، در چارچوب مرجع لخت K، اتفاق می‌افتند. بنابر رابطهٔ (۱) از ۱۹.۲، رویداد (B, B') زودتر از رویداد (A, A') در چارچوب مرجع لخت K' اتفاق می‌افتد، در ضمن

$$\Delta t' = |AB|_{K'} \cdot \frac{v}{c^2} : \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (1)$$

که در آن $|AB|_{K'}$، طول پاره‌خط AB درچارچوب مرجع لخت K'است.

در شکل ۴۷-b دیده می‌شود

$$|A'B'|_{K'} - |AB|_{K'} = v\Delta t' \qquad (2)$$

فرض کنیم طول پاره‌خط متحرك، با ضریب α، به‌طول پاره‌خط ساکن مربوط شود، آن‌گاه می‌نویسیم:

$$|A'B'|_K = \alpha |AB|_K = \alpha |A'B'|_{K'}$$

یعنی

$$l = \alpha l_0 \qquad (3)$$

همچنین $|AB|_{K'}=\alpha|AB|_K$، یعنی

$$|AB|_{K'}=\alpha l \qquad (۴)$$

اکنون، با توجه به‌رابطه‌های (۱) تا (۴) به‌دست می‌آید:

$$\alpha=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

از آن‌جا

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (۵)$$

یعنی $l_{\parallel}\neq \mathrm{inv}$ ($\parallel$ ، نماد دو پاره خط موازی است). چون $v<c$، پس $l<l_0$.

۲۴۰۲. فاصلهٔ زمانی بین دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K' ـ گسیل و برگشت سیگنال نوری ـ برابر است با $\tau_0=\frac{2l_0}{c}$. همین فاصلهٔ زمانی نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، بنابر رابطهٔ (۱) از ۲۱۰۲، برابر است با $\tau=\frac{2l_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، از طرف دیگر $\tau=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}$، که در آن، $l=A'B'|_K$؛ این دو جمله، متناظرند با حرکت سیگنال نوری از نقطهٔ A' (که در چارچوب مرجع لخت K، سرعتی برابر v دارد) تا نقطهٔ B' (که بازهم با سرعت v حرکت می‌کند) و برعکس. از برابری

$$\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

به‌دست می‌آید:

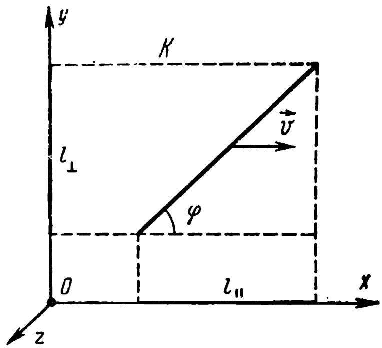
$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

یعنی همان رابطهٔ (۵) که به‌عنوان جواب، در مسألهٔ ۲۳۰۲ به‌دست آوردیم.

۲۵۰۲. محاسبه را در چارچوب مرجع لخت K انجام می‌دهیم که

میله، نسبت به آن، چنان حرکت می‌کند که در شکل ۴۸ نشان داده شده‌است.
در این صورت

$$l^{۲}=l_{\perp}^{۲}+l_{\parallel}^{۲} \qquad (۱)$$



شکل ۴۸

ولی (۲۰۰۲ و ۲۳۰۲ را ببینید):

$$l_{\perp}=l_{\circ\perp} \ , \ l_{\parallel}=l_{\circ\parallel}\sqrt{۱-\beta^{۲}} \ \left(\beta=\frac{v}{c}\right)$$

بنابراین

$$l^{۲}=l_{\circ}^{۲}-l_{\circ\parallel}^{۲}\beta^{۲} \qquad (۲)$$

که در آن $l_{\circ}^{۲}=l_{\circ\perp}^{۲}+l_{\circ\parallel}^{۲}$.

چون $l_{\parallel}=l\cos\varphi=l_{\circ\parallel}\sqrt{۱-\beta^{۲}}$، بنابراین

$$l_{\circ\parallel}^{۲}=\frac{l^{۲}\cos^{۲}\varphi}{۱-\beta^{۲}}$$

و از رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید:

$$l=l_{\circ}\sqrt{\frac{۱-\beta^{۲}}{۱-\beta^{۲}\cos^{۲}\varphi}} \qquad (۳)$$

به‌ازای $\varphi=\circ$ و $\varphi=\frac{\pi}{۲}$، رابطهٔ (۳) به‌نتیجه‌هایی منجر می‌شود که در حل مسأله‌های ۲۰۰۲ و ۲۳۰۲ پیدا کردیم.

۲۶۰۲. چون در رابطهٔ (۱) از مسألهٔ ۱۹۰۲ داریم:

$$|AB'|_K = l = l_\circ\sqrt{1-\frac{v^۲}{c^۲}}$$

بنا براین

$$\tau = \frac{l_\circ \frac{v}{c^۲}}{\sqrt{1-\frac{v^۲}{c^۲}}} \qquad (۱)$$

رابطهٔ ناهم‌زمانی (۱)، فاصلهٔ زمانی بین دو رویداد را در چارچوب مرجع لخت K بیان می‌کند، به‌شرطی کــه در چارچوب مرجع لخت K'، به‌طورهم‌زمان و دردوانتهای پاره‌خطی موازی $\vec{v}$ اتفاق افتاده باشند(پاره‌خط درچارچوب مرجع لخت K'، ساکن است).

۲۷.۲. با توجه به‌رابطهٔ (۱) از مسألهٔ **۲۱.۲** داریم:

$$\tau = \frac{\tau_\circ}{\sqrt{1-\frac{v^۲}{c^۲}}}$$

τ فاصلهٔ زمانی بین رویدادهای مفروض در چارچوب مرجع لخت K است که، در آن جا، در نقطه‌های مختلف اتفاق افتاده‌اند؛ بنابراین، فاصلهٔ بین این نقطه‌ها چنین می‌شود:

$$v\tau = \frac{v\tau_\circ}{\sqrt{1-\frac{v^۲}{c^۲}}}$$

۲۸.۲. اگــر رویدادهای مفروض در چارچوب مرجع لخت K'، به‌طورهم‌زمان اتفاق افتاده‌بودند، برمبنای رابطهٔ (۱) ازمسألهٔ **۲۱.۲** داشتیم:

$$\Delta t = \Delta t_۱ = \frac{\Delta x' \frac{v}{c^۲}}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

و اگر در چارچوب مرجع لخت K'، در یك نقطه اتفاق می‌افتادند، بنا بر رابطهٔ (۱) از مسألهٔ **۲۱.۲** داشتیم:

$$\Delta t=\Delta t_2=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ولی از آن‌جا که در حالت کلی، با هر دو حقیقت سر وکار داریم، بنابراین $\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2$، یعنی

$$\Delta t=\frac{\Delta x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\Delta x'\frac{v}{c^2}+\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1)$$

برای بازهٔ‌فضایی Δx می‌نویسیم: $\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2$. اگررویدادها در چارچوب مرجع K' هم‌زمان بودند، آن وقت

$$\Delta x=\Delta x_1=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ (|\Delta x'|_{K'}=|\Delta x|_{K'}=l,\ \ |\Delta x|_{K'}=l_0)$$

و اگر در چارچوب مرجع لخت K'، دریك نقطه اتفاق می‌افتادند، آن وقت (۲۷۰۲ را ببینید):

$$\Delta x=\Delta x_2=v\Delta t=\frac{v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

در نتیجه در حالت کلی داریم:

$$\Delta x=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (2)$$

۲۹۰۲. دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K' در نظر می‌گیریم:

$$O'(0,0,0) \quad \text{و} \quad A'(x',y',t')$$

که برای آن‌ها، بازهٔ فضایی ــ روی محـورهای مختصات ــ و فاصلهٔ زمانی، به‌ترتیب برابرند با

$$\Delta x'=x',\ \ \Delta y'=y',\ \ \Delta t'=t'$$

رویدادهای مفروض، درچارچوب مرجع لخت K، به $O(0,0,0)$، $A(x,y,t)$ و $\Delta x=x$، $\Delta y=y$، $\Delta t=t$ تبدیل می‌شوند.

اگر رابطه‌های (۱) و (۲) از مسألهٔ **۲۸۰۲** را دربارهٔ این رویدادها به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad y=y',\ \ t=\frac{x'\frac{v}{c^2}+t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1)$$

در آن‌ها $l_{\perp}$ ناوردا به‌حساب آمده است و، بنابراین $y=y'$. اگر معادله‌های (۱) را نسبت به x'، y' و z' حل کنیم، حاصل می‌شود:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad y'=y,\ \ t'=\frac{-x\frac{v}{c^2}+t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\beta=\frac{v}{c}\right) \qquad (2)$$

رابطه‌های (۱) و(۲) را، در نظریهٔ نسبیت خاص، تبدیل‌های لورنتس می‌نامند. این رابطه‌ها، عبور از یك چارچوب مرجع لخت را به‌دیگری توصیف می‌کنند و این امکان را فراهم می‌آورند که، با معلوم بودن سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K (که موازی محورهای Ox و $O'x'$ است)، مختصات (موضع و زمان رویداد) را پیدا کنیم (شکل ۱ را ببینید).

با شرط $c\to\infty$، تبدیل‌های لورنتس، منجر به تبدیل‌های گالیله می‌شوند.

۲۰۳۰۲ ۱) فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K'، در نقطه‌های بامشخصهٔ x'، دورویداد به‌ترتیب، درلحظه‌های t'_1 و t'_2 اتفاق بیفتند، به‌نحوی که فاصلهٔ زمانی بین آن‌ها عبارت باشد از $\Delta t'=t'_2-t'_1$.

دراین صورت از تبدیل لورنتس (رابطهٔ (۱) درمسألهٔ **۲۹۰۲**)، برای این رویدادها در چارچوب مرجع لخت K داریم:

$$t_1=\frac{x'\frac{v}{c^2}+t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad t_2=\frac{x'\frac{v}{c^2}+t'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$t_2-t_1=\frac{t'_2-t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad \text{یا}\quad \Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

بنابر شرط مسأله $\Delta t=\tau$ و $\Delta t'=\tau_0$. به این ترتیب، همان نتیجه از مسألهٔ **۲۱۰۲** به‌دست می‌آید.

۲) پاره‌خطی به‌طول $\Delta x'=x'_۲-x'_۱$ $(\Delta x' \| \overrightarrow{v})$ درچارچوب‌مرجع لخت K'، و دو رویداد هم‌زمان (در لحظه‌ای مثل t) در دو انتهای این پاره‌خط درچارچوب مرجع لخت K، در نظر می‌گیریم: $(x_۱, t)$،$(x_۲, t)$، $\Delta x=x_۲-x_۱$. برای این رویدادها، در چارچوب مرجع لخت K'، بنابر تبدیل لورنتس (۲) از ۲۹۰۲ به‌دست می‌آید:

$$\Delta x'=x'_۲-x'_۱=\frac{x_۲-x_۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

چون بنابر شرط مسأله: $\Delta x'=l_\circ$ و $\Delta x=l$، بنابراین

$$l=l_\circ\sqrt{۱-\beta^۲}$$

یعنی همان رابطهٔ (۵) از مسألهٔ **۲۳۰۲**.

۳) فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K'، در نقطه‌های مختلفی ازمحور،دو رویداد هم‌زمان اتفاق بیفتند: $A'(x'_۱, \circ, t')$و$B'(x'_۲, \circ, t')$؛ $\Delta x=x'_۲-x'_۱=l_\circ$. با استفاده از تبدیل لورنتس (رابطهٔ (۱) از مسألهٔ **۲۹۰۲**) می‌توانیم فاصلهٔ زمانی بین این رویدادها را در چارچوب مرجع لخت K پیدا کنیم:

$$t_۲-t_۱=\Delta t=\frac{l_\circ\frac{v}{c^۲}}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

یعنی همان رابطهٔ (۱) از مسألهٔ **۲۶۰۲**.

۴) اگر در چارچوب مرجع لخت K'، در یك نقطه از محور x'، دو رویداد اتفاق بیفتد: $A'(x', \circ, t'_۱)$ و $B'(x', \circ, t'_۲)$، آن‌گاه از تبدیل لورنتس در چارچوب مرجع لخت K به‌دست می‌آید:

$$\Delta x=x_۲-x_۱=\frac{v\Delta t'}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

یعنی همان نتیجهٔ مسألهٔ **۲۷۰۲**.

به این ترتیب، تبدیل‌های لورنتس، همهٔ رابطه‌های فضا و زمان نظریهٔ نسبیت خاص را ــ که قبلاً پیدا کرده بودیم ــ دربرمی‌گیرند.

۳۱۰۲. الف) فرض کنید دو رویداد در چارچوب مرجع لخت K'، با فاصلهٔ زمانی $\Delta t'$ به‌فاصلهٔ $\Delta x'$ از یکدیگر، اتفاق افتاده باشند. مقدارهای

$$S'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 \quad \text{و} \quad S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

را برای دورویداد، به‌ترتیب درچارچوب‌های مرجع لخت K' و K، تشکیل می‌دهیم. تبدیل‌های لورنتس را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}\Delta x + \Delta t\right)$$

که‌در آن‌ها $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ و $\beta = \frac{v}{c}$؛ به‌محاسبه می‌پردازیم:

$$S'^2 = c^2\gamma^2\left(-\frac{v}{c^2}\Delta x + \Delta t\right)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

یا $S^2 = S'^2$، یعنی

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad (1)$$

به‌این ترتیب: $S^2 = \mathrm{inv}$.

ب) برای‌سیگنال مبنا درچارچوب‌های مرجع لخت K' و K داریم: $\Delta x' = c\Delta t'$، $\Delta x = c\Delta t$. از آن جا

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0, \quad c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$$

یعنی در حالت کلی، $S^2 = kS'^2$، زیرا به‌ازای $S'^2 = 0$ باید داشته باشیم: $S^2 = 0$. ضریب k نمی‌تواند، بــه علت همگنی فضا، بــه مختصات فضایی رویداد و، بــه علت همگنی زمان، بــه‌زمان بستگی داشته باشد. سرانجام با به حساب آوردن همسانگــردی فضا نتیجــه می‌گیریم: یا $k = \mathrm{const}$ یا $k = k(v)$، یعنی ضریب k تنها به سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K می‌تواند مربوط باشد.

برای‌این‌که ضریب k را تعیین کنیم، دورویداد دلخواه درنظر می‌گیریم (k، مستقل از انتخاب رویداد است). مثلاً، رویدادهایی کــه در چارچوب مرجع لخت K' درنقطه‌ای با مختص x' وفاصلهٔ زمانی $\Delta t = t'_2 - t'_1$ اتفاق افتاده باشند. در این صورت

$$S'^2 = c^2\Delta t'^2 \qquad (1)$$

حالا $S^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2$ را پیدا می‌کنیم. درچارچوب مرجع لخت K، در زمان Δt نقطه‌ای با مختص x، با سرعت v حرکت می‌کند و به‌فاصلهٔ $\Delta x=v\Delta t$ منتقل می‌شود که عبارت است از بازهٔ فضایی دو رویداد مفروض در چارچوب مرجع لخت K، یعنی

$$S^2=c^2\Delta t^2-v^2\Delta t^2=(c^2-v^2)\Delta t^2 \qquad (۲)$$

عبارت‌های (۱) و (۲) را در $S^2=k\cdot S'^2$ قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(c^2-v^2)\Delta t^2=kc^2\Delta t'^2 \qquad (۳)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$، از (۳) به‌دست‌می‌آید: $k=1$

و بنابراین

$$S^2=S'^2=\mathrm{inv}$$

یادآوری می‌کنیم، درحالت‌کلی، بازهٔ S بین دورویداد، به‌این‌صورت تعریف می‌شود:

$$S^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2$$

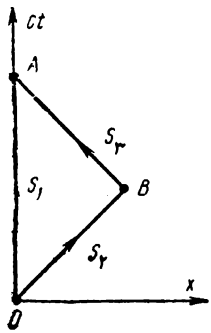
ناوردایی کمیت S^2 در نظریهٔ نسبیت خاص، اهمیت زیادی دارد. این ناوردایی ازنظرهندسی، به‌معنای آن‌است که تنوع‌رویدادهای (x, y, z, ct)، عبارت است از فضای چهاربعدی که، در نظریهٔ نسبیت خاص، فضا ـ زمان نامیده می‌شود.

کمیت S^2، مقیاسی‌است برای تعیین تنوع رویدادهای (x, y, z, ct): مجذورفاصلهٔ بین نقطه‌ها، معرف رویداد است. فضا ـ زمان، یك فضای‌چهار-بعدی نااقلیدسی است (برای فضای اقلیدسی باید داشته باشیم:

$$S^2=c^2\Delta t^2+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$$

ولی در این صورت $S\neq\mathrm{inv}$).

به‌عنوان مثال، فضا ـ زمان دوبعدی را در چارچوب مرجع لخت K، در نظر می‌گیریم. روی شکل ۴۹، OA را «جهان خط» ذره‌های ساکن، و OB و BA را «جهان خطهای» ذره‌هایی می‌نامندکه، در چارچوب مرجع لخت K، ابتدا با سرعت v وسپس با سرعت $-v$ حرکت می‌کنند. طول‌این «جهان خطها» را پیدا می‌کنیم:



شکل ۴۹

$$|OA|^{۲}=S_{۱}^{۲}=c^{۲}\Delta t_{۱}^{۲},\quad |OB|^{۲}=S_{۲}^{۲}=(c^{۲}-v^{۲})\Delta t_{۲}^{۲},$$
$$|BA|^{۲}=S_{۳}^{۲}=(c^{۲}-v^{۲})\Delta t_{۳}^{۲}$$

چون $\Delta t_{۲}=\Delta t_{۳}$ و $\Delta t_{۱}=\Delta t_{۲}+\Delta t_{۳}$، بنابراین $S_{۱}^{۲}>S_{۲}^{۲}+S_{۳}^{۲}$، یعنی $|OA|>|OB|+|BA|$: طول پاره‌خط راست از طول پاره‌خط شکسته بزرگتر است. به این ترتیب می‌بینید، ویژگی‌های فضای نااقلیدسی با ویژگی‌های فضای اقلیدسی فرق دارد.

ناوردایی $S^{۲}$ نشان می‌دهد که، ویژگی‌های فضا ــ زمان (در مجموع) به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت بستگی ندارد. به این علت، اغلب آن را فضا ــ زمان مطلق گویند.

۳۲۰۲. ۱) توجه خود را به‌فضا ــ زمان دوبعدی محدود می‌کنیم، که در آن $S^{۲}=c^{۲}\Delta t^{۲}-\Delta x^{۲}$. روشن است که سه‌نوع بازه ممکن است: الف) بازهٔ حقیقی $S^{۲}>۰$؛ ب) بازهٔ صفر $S^{۲}=۰$؛ ج) بازهٔ موهومی $S^{۲}<۰$. با توجه به‌ناوردایی بازه، انواع آن، مستقل از چارچوب مرجع لخت، یعنی ناوردا است.

۲) وضع هر نوع بازه را روشن می‌کنیم:

الف) به‌ازای $S^{۲}=c^{۲}\Delta t^{۲}-\Delta x^{۲}>۰$ داریم: $\Delta t>\dfrac{\Delta x}{c}$. یعنی رویدادهای مربوط به‌بازهٔ حقیقی، یکی پس از دیگری و با گذشت فاصله‌ای از زمان اتفاق می‌افتند که بیشتر از زمانی است که سیگنال مبنا (و در حالت

خاص،نور)، برای عبور ازفاصلهٔ بین دونقطهٔ فضایی (که رویدادها درآن‌ها به‌وقوع می‌پیوندند) لازم دارد.

چون $S^{2}=\text{inv}$ ، بنابراین در چارچوب لخت K' داریم: $c^{2}\Delta t'^{2}-\Delta x'^{2}>0$. این نابرابری ، $\Delta x'=0$ را ممکن می‌سازد ، ولی $\Delta t'=0$ را منع می‌کند. یعنی چنان چارچوب مرجع لختی مانند K' وجود داردکه درآن، دو رویداد دریك محل اتفاق می‌افتند، ولی چارچوب مرجع لختی پیدا نمی‌شودکه درآن، رویدادها هم‌زمان‌باشند. به‌همین مناسبت، بازهٔ حقیقی را همانند زمانی گویند. درمورد رویدادهایی‌که به این نوع بازه مربوطاند، مفهوم‌های «قبل» و «بعد» ناوردا و مفهوم «فضا» وردا است.

رویدادهایی‌که رابطهٔ $\tau=\frac{\tau_{0}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$ در مورد آن‌ها صادق باشد، مربوط به‌بازهٔ همانند زمانی می‌شوند.

ب) به‌ازای $S^{2}=c^{2}\Delta t^{2}-\Delta x^{2}=0$ داریم: $\Delta t=\frac{\Delta x}{c}$. بازهٔ صفر دو رویدادی را به‌هم مربوط می‌کندکه می‌تواند (ولی البته، نه‌الزاماً)، یکی ازآن‌ها گسیل سیگنال‌مبنا (ودرحالت خاص، نور) باشد ودیگری، جذب آن.

ج) به‌ازای $S^{2}=c^{2}\Delta t^{2}-\Delta x^{2}<0$ داریم: $\Delta t<\frac{\Delta x}{c}$. بازهٔ موهومی، به‌چنان رویدادهایی مربوط می‌شودکه یکی بعد از دیگری پیش می‌آید و، درضمن، بازهٔ زمانی این دورویدادکمتراز زمانی است که‌سیگنال مبنا برای گذشتن ازفاصلهٔ بین دونقطه (که رویدادهادرآن‌ها اتفاق افتاده‌اند) لازم دارد.

چون $S^{2}=\text{inv}$ ، بنابراین، در چارچوب مرجع لخت K' داریم: $c^{2}\Delta t'^{2}-\Delta x'^{2}<0$ و،در نتیجه، می‌توان یك چارچوب مرجع لخت K' پیداکرد که درآن‌داشته باشیم: $\Delta t'=0$ (رویدادهای‌مفروض، هم‌زمان‌اند)، ولی چارچوب مرجع لختی وجود نداردکه درآن، این رویدادها دریك‌نقطه پیش‌آیند($\Delta x'=0$ ممکن نیست). به‌همین مناسبت؛ بازهٔموهومی‌را «همانند فضایی» گویند. این نام‌گذاری بر این مطلب تأکید می‌کندکه در این جا،

مفهوم جدایی فضایی ناوردا، ولی ترتیب زمانی، نسبی است.

رابطهٔ ناهم‌زمانی (رابطهٔ (۱) از مسألهٔ ۲۶۰۲) در مورد رویدادهایی صادق است که به‌بازهٔ همانند فضایی مربوط باشند.

۲۳۰۲. این پرسش را مطرح می‌کنیم: چه نوع بازه‌ای بــه چه نوع رویدادهایی مربوط می‌شود که، از آن‌ها، یکی علت و دیگری معلول است؟

روشن است که رویداد علت باید قبل از رویداد معلول اتفاق افتاده باشد و ، این ردیف، باید در هر چارچوب مرجع لخت برقرار باشد، یعنی این ترتیب، ناوردا است. این، شرط لازم اصل علیت است.

این شرط، با دو نــوع بازه سازگــار است: بازهٔ صفر و بازهٔ همانند زمانی. بنابراین، برای رویدادهای مــورد نظر، باید داشته باشیم: $S^2 \geqslant 0$ (مسألهٔ **۸۰۳** را هم ببینید).

این شرط را برای معادله‌های مفروض، مورد تحقیق قرار می‌دهیم:

$$\Delta x = 1/5 \times 10^9 \text{ (متر)}$$

الف) به‌ازای $\Delta t = 1$: $S^2 < 0$؛ ب) به‌ازای $\Delta t = 5$: $S^2 = 0$؛ ج) به‌ازای $\Delta t = 10$: $S^2 > 0$.

بنابراین، در حالت‌های ب) و ج)، می‌توان رویدادها را علت‌ومعلول دانست. درحالت الف) چارچوب مرجع لختی پیدا می‌شود که رویدادها در آن، به طور هم‌زمان پیش می‌آیند ، ولی در حالت ج) می‌توان چــارچوب مرجع لختی پیدا کرد که در آن رویدادها در یك مکان اتفاق افتاده باشند.

۲۴۰۲. درچارچوب مرجع لخت K (که سفینه نسبت به آن با سرعت نامعلوم v حرکت می‌کند)، بنا به‌فرض داریم:

$$\Delta x = 6 \times 10^8 \text{ (متر)} \quad , \quad \Delta t = 1 \text{ (ثانیه)}$$

مقدار S^2 را پیدا می‌کنیم:

$$S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = -2/7 \times 10^{17} < 0$$

یعنی بازه موهومی است (همانند فضایی).

درچارچوب مرجع لخت K' (سفینه) داریم: $S'^2 = -\Delta x'^2$ (زیرا طبق شرط $\Delta t' = 0$). بنابراین

$$\Delta x'^{۲}=۲/۷\times ۱۰^{۱۷} \Longrightarrow \Delta x'=۳\sqrt{۳}\times ۱۰^{۸}\ \text{(متر)}$$

با استفاده از رابطهٔ ناهم‌زمانی ((۱) از ۲۶۰۲) ، با قرار دادن $\Delta t=۱$ و $\Delta x'=۳\sqrt{۳}\times ۱۰^{۸}=l_{\circ}$، مقدار v به‌دست می‌آید:

$$v=۱/۵\times ۱۰^{۸}\ \text{(متر بر ثانیه)}$$

۳۵۰۲. به‌ازای $\Delta x=۳\times ۱۰^{۹}m$ و $\Delta t=۱۵\ \text{sec}$، در چارچوب مرجع لخت K داریم:

$$S^{۲}=c^{۲}\Delta t^{۲}-\Delta x^{۲}=۱/۱۲۵\times ۱۰^{۱۹}>۰$$

یعنی با بازهٔ حقیقی سروکار داریم (همانند زمانی). در چارچوب مرجع لخت K'(سفینه)$S'^{۲}=c^{۲}\Delta t'^{۲}$ (طبق فرض $\Delta x'=۰$) و $\Delta t'=۵\sqrt{۵}\text{sec}$.

چون در چارچوب مرجع K' (سفینه) رویدادها در یك نقطه اتفاق می‌افتند؛ بنابراین، درچارچوب مرجع لخت K، در فاصلهٔ $\Delta x'$،که سفینه‌در زمان $\Delta t=۱۵\text{sec}$ طی‌می‌کند، قرار می‌گیرند. بنابراین سرعت سفینه‌برابر است با

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=۲\times ۱۰^{۸}\ \text{(متر بر ثانیه)}$$

مقدارمجهول را به‌طریق دیگری‌هم می‌توان پیدا کرد. اگر از رابطهٔ $\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}}$ استفاده‌کنیم (که درحالت موردنظر ما، به‌ازای $\Delta t=۱۵$ و $\Delta t=۵\sqrt{۵}$ صادق است) به‌دست می‌آید:

$$v=۲\times ۱۰^{۸}\ \text{(متر بر ثانیه)}$$

۳۶۰۲. بنا بر فرض مسأله، ساعت A، ضمن برخورد با ساعت O'، زمانی برابر ۱۰۰ ثانیه را نشان می‌دهد. درضمن، ساعت O' (بنابر **۲۱۰۲**) زمانی برابر

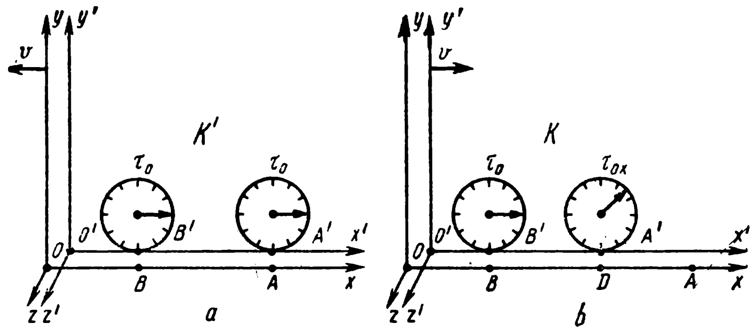
$$۱۰۰\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}=۵۰\ \text{(ثانیه)}$$

را نشان‌می‌دهد (برای ساعت O'، رویدادهای (O', O) و (O', A) دریك محل اتفاق می‌افتند: در نقطهٔ O'؛ ولی برای ساعت A، این رویدادها، دردو محل مختلف چارچوب سکون آن، یعنی در نقطه‌های O و A اتفاق می‌افتند.

بنابراین در اینجا $\tau = 100''$ و $50'' = \tau_0$). به‌همین ترتیب، ضمن برخورد ساعت‌های B' و O، ساعت اخیر زمان $50\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$، یعنی ۲۵ ثانیه را نشان می‌دهد.

۳۷.۲. فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K' (خط کش)، ساعت‌های A' و B'، زمان τ_0 را نشان می‌دهند. درضمن دو رویداد (A, A') و (B, B')، در چارچوب مرجع مفروض، یعنی انطباق نقطه‌های A' و B'، به‌ترتیب، بر A و B (شکل ۵۰–a)، هم‌زمان باشند.

در چارچوب مرجع لخت K، رویداد (B, B')، قبل از رویداد (A, A') اتفاق می‌افتد (۱۹.۲ و ۲۶.۲ را ببینید) و این فاصلهٔ زمانی برابر است $\Delta t = \dfrac{l_0 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (شکل ۵۰–b). در لحظهٔ وقوع رویداد (B, B')،



شکل ۵۰

ساعت B' زمان τ_0 را نشان می‌دهد و ساعت A' درنقطهٔ D واقع است: زمان τ_{0x}. چون ساعت A'، قبل ازنقطهٔ A، در مدت زمان Δt حرکت می‌کند (در چارچوب مرجع لخت K) و در نقطهٔ A زمان τ_0 را نشان می‌دهد، بنابراین

$$\tau_0 = \tau_{0x} + \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \tau_{0x} + l_0 \cdot \frac{v}{c^2}$$

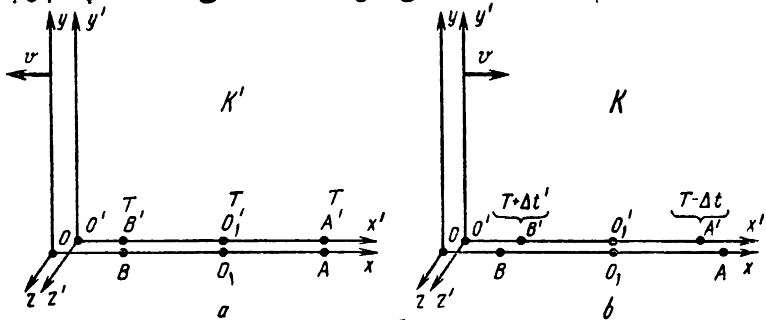
دراین صورت، اختلاف ساعت‌های A' و B'، در چارچوب مرجع لخت K،

درهر لحظهٔ این چارچوب مرجع، برابر است با

$$\tau_{\circ}-\tau_{\circ x}=\Delta\tau_{\circ}=l_{\circ}\cdot\frac{v}{c^{2}} \qquad (1)$$

یعنی ساعت B'، به‌اندازهٔ $l_{\circ}\cdot\frac{v}{c^{2}}$، در چارچوب مرجع لخت K، از ساعت A' جلو می‌افتد.

۲۸.۲. بنا به فرض، در چـارچـوب مرجع لخت K'، رویدادهای (B', B)، (O'_1, O_1) و (A', A) (شکل ۵۱) در یك زمان اتفاق می‌افتند و ساعت‌های B'، O'_1 و A'، زمـانـی مثل T را نشان می‌دهند. در چارچوب

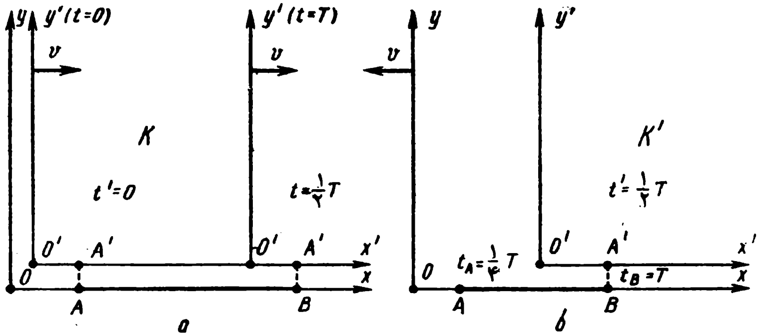


شکل ۵۱

مرجع لخت K، بنابرنتیجهٔ مسألهٔ **۱۹.۲**، ابتدا رویداد (B',B)، بعدرویداد (O'_1, O_1) وسرانجام رویداد (A', A) اتفاق می‌افتد. درلحظهٔ اتفاق‌رویداد (O'_1, O_1)، ساعت B' در چارچوب مرجع لخت K (بنا بـر رابطهٔ (۱) از **۲۷.۲**) زمان $\tau_{\circ B'}=T+\frac{1}{2}l_{\circ}\frac{v}{c^{2}}$ و ساعت A'، زمان $\tau_{\circ A'}=T-\frac{1}{2}l_{\circ}\frac{v}{c^{2}}$ را نشان می‌دهند. ساعت O_1 و همهٔ ساعت‌های چارچوب مرجع لخت K، که با آن هم‌زمان شده‌اند، زمان T را نشان می‌دهد. بنابراین، ساعت B' ازساعت O_1 جلو می‌افتد و ساعت A' از ساعت O_1 عقب می‌افتد و هر دو، با فاصلهٔ زمانی $\frac{1}{2}l_{\circ}\frac{v}{c^{2}}$.

۲۹.۲. چارچوب‌های مرجع K و K' را به‌ترتیب، به‌ایستگاه وقطار مربوط می‌کنیم. از فرض مسأله معلوم می‌شود که زمان مطالعهٔ کتاب (برای هر یك از دو نفر) برابر است با $T=\frac{|AB|}{v}$.

الف) بحث را در چارچوب مرجع لخت K انجام می‌دهیم. رویداد $(\bar{A'}, B)$ (شکل ۵۲ – a) درلحظهٔ T، در چارچوب مرجع لخت K، اتفاق می‌افتد (فرض کنید رویداد (A, A') در چارچوب مرجع لخت K با لحظهٔ $t = t' = ۰$ متناظر باشد)؛ ولـی همین رویـداد، در چـارچوب لخت K' ــبنابر رابطهٔ (۱) از ۲۱۰۲ ــ در لحظـهٔ $t' = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}T$ پیـش



شکل ۵۲

می‌آید. به‌این ترتیب به ازای رویداد $(A \text{،} B)$ (در چارچوب مرجع لخت K)، کسی که در قطار است، نصف کتاب را می‌خواند، ولی کسی کـه در ایستگاه نشسته است،کتاب را تمام می‌کند.

ب) ولی اگر در چـارچـوب مرجع لخت K' بحث کنیم، به‌نتیجهٔ دیگری می‌رسیم. می‌دانیم، بـه‌ازای رویداد (A', B) در چارچوب مرجع لخت K'، زمان $\frac{1}{2}T$ خواهدبود، بنابراین، طبق رابطهٔ (۱) از ۲۱۰۲، زمان ساعت‌کسی را که درایستگاه A نشسته است، پیدا می‌کنیم (به‌ازای رویداد (A', B) در چارچوب مرجع لخت K'):

$$t = \frac{1}{2}T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{4}T$$

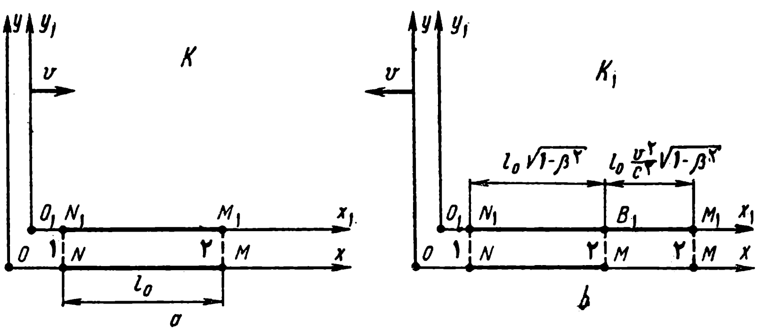
یعنی وقتی‌که مسافر قطار، نصف کتاب را خـوانده است، شخص ساکن در ایستگاه، به‌یك چهارم‌آن می‌رسد.

به‌این ترتیب، مسافر قطار نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، دیرترو

نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K'، زودتر از کسی که در ایستگاه نشسته است، کتاب را می‌خواند.

روش ناوردای مقایسهٔ زمان ساعت‌ها (و یا در شرایط مسألهٔ ما، میزان مطالعهٔ کتاب) عبارت است از مقابلهٔ آن‌ها، ضمن انطباق فضایی در موردهای دیگر. همان‌طور که حل این مسأله نشان داد، نتیجهٔ مقایسهٔ زمان ساعت‌ها (ساعت متحرك و ساعت ساکن) وردا خواهد بود، یعنی بستگی به انتخاب چارچوب مرجع لخت دارد.

۴۵۰۲. دورهٔ زندگی مزون را τ_0 می‌گیریم (این دوره برای هر دو مزون یکی است). مزون متحرك در چارچوب مرجع لخت آزمایشگاه K، به‌مدت $\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}>\tau_0$ زندگی می‌کند (۲۱۰۲ را ببینید)، بنابراین وقتی به‌نقطهٔ M برسد (شکل ۵۳–a)، دیگر مزون ۲ وجود ندارد (واپاشیده شده است). یعنی زمان حرکت مزون ۱ به طرف مزون ۲، برابر است با $\tau>\frac{l_0}{v}>\tau_0$.



شکل ۵۳

در چارچوب مرجع لخت K (که مزون ۱ در آن جا ساکن است)، مزون ۲ به‌مدت $\frac{l_0\frac{v_0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$، قبل از مزون ۱ متولد می‌شود (۲۶۰۲ را ببینید). تولد مزون ۱ وقتی اتفاق می‌افتد که مزون ۲ در نقطهٔ B_1 از چارچوب مرجع لخت K_1 قرار می‌گیرد (شکل ۵۳–b). وقتی نقطهٔ متحرك M به‌نقطهٔ N_1

(که مزون ساکن ۱، در آن جا قرار دارد) برسد، در آن (یعنی در نقطهٔ M) دیگر مزون ۲ وجود ندارد (قبل از این لحظه واپاشیده است)، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$\frac{l_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}}}{v}+\frac{l_{\circ}\frac{v}{c^{2}}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}>\frac{\tau_{\circ}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$$

که در آن، جملهٔ اول عبارت است از زمان حرکت نقطهٔ M از B_1 تا N_1؛ جملهٔ دوم،مدت زمان زندگی مزون ۲، از لحظهٔ تولد تا لحظهٔ رسیدن به‌نقطهٔ B_1؛ و مقدار $\frac{\tau_{\circ}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$، زمان زندگی مزون متحرك ۲ در چارچوب مرجع لخت K_1 است.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد کــه، نابرابری بالا، با توجه به شرط $\tau_{\circ}>\frac{l_{\circ}}{v}$، درست‌است.از آن‌جا که $\tau_{\circ}>\frac{l_{\circ}}{v}\sqrt{1-\beta^{2}}$ (به‌دلیل $\tau>\frac{l_{\circ}}{v}>\tau_{\circ}$) وقتی که نقطهٔ M (که دیگر شامل مزون ۲ نیست) بر نقطهٔ N_1 منطبق شود، مزون ۱، هنوز واپاشیده نشده است.

به‌این ترتیب، نتیجهٔ بررسی پدیده، به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت بستگی ندارد.

۴۱.۲. زمان حرکت هر سفینه تا لحظهٔ برخورد، از رابطهٔ

$$l_{\circ}=vt+2vt=3vt$$

به‌دست می‌آید. از آن جا $\tau=\frac{l_{\circ}}{3v}$. بنابراین، ساعت‌های دو سفینه به‌ترتیب، این زمان‌ها را نشان می‌دهند:

$$\tau_{\circ 1}=\frac{l_{\circ}}{3v}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}\ ,\ \ \tau_{\circ 2}=\frac{l_{\circ}}{3v}\sqrt{1-4\frac{v^{2}}{c^{2}}},\tau_{\circ 1}>\tau_{\circ 2}$$

۴۲.۲. قطار تا ستون A را (درچارچوب مربوط به‌خط راه‌آهن) در مدت $\tau=\frac{l_{\circ}}{v}$ طی می‌کند. مسافر قطار، ستون A را در لحظهٔ

$$\tau_{\circ}=\frac{l_{\circ}}{v}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}=0/5\frac{l_{\circ}}{v}$$

می‌بیند (روی ساعت خودش). وقتی ساعت او ، زمان $\tau_{\circ}=\frac{l_{\circ}}{v}$ را نشان‌دهد، قطار (در چارچوب خط راه‌آهن) راهی را طی می‌کند که با زمان

$$T=\frac{T_{\circ}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}=\frac{2l_{\circ}}{v}$$

متناظر است، یعنی به‌ستونی رسیده است که کیلومتر $2l_{\circ}$ را نشان می‌دهد.

۴۳.۲. زمان حرکت مزون، درچارچوب مرجع زمین، برابراست با

$$\tau=\frac{l_{\circ}}{v}\approx 1/6\times 10^{-5}\ \text{(ثانیه)}$$

زمان واقعی زندگی این مزون، برابر است با

$$\tau_{\circ}=\frac{l_{\circ}}{v}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}\approx 2/2\times 10^{-6}\ \text{(ثانیه)}$$

اگر زمان زندگی مزون ساکن با زمان زنـدگـی مزون متحرك برابر بود (علی‌رغم رابطهٔ نسبیتی (۱) در **۲۱.۲**)، آن وقت، مزون درچارچوب مرجع زمین، فاصلهٔ $L=v\tau_{\circ}\approx 650\,\mathrm{m}$ را طی می‌کرد.

۴۴.۲. با توجه به‌شرط مسأله: $\tau_{\circ}=10^{-8}\mathrm{sec}$ (زیرا در چارچوب هدف، دو رویداد ـ رسیدن مزون‌ها به‌هدف ـ در یك نقطه اتفاق می‌افتند).

در چارچوب مرجع مزون‌ها، این رویدادها، در فاصلهٔ زمانی $\tau=\frac{\tau_{\circ}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}$ اتفاق می‌افتند که بـرابـر است با زمان حرکت هدف، از لحظهٔ اتفاق یك رویدادتا لحظهٔ اتفاق رویداد دیگر. بنابراین، فاصلهٔ موردنظرچنین می‌شود:

$$l_{\circ}=v\tau=\frac{v\tau_{\circ}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\approx 7/6\ \text{(متر)}$$

نسبت به چارچوب مرجع لخت آزمایشگاه (یعنی هدف)، فـاصلهٔ دو ذره از یکدیگر چنین است:

$$l=l_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}}\approx 1/1\text{(متر)}$$

۴۵.۲. ابتدا چارچوب‌مرجع قطار را درنظرمی‌گیریم. مسافردرخشش نور را در لحظهٔ $\frac{l_{\circ}}{c}$ و ناظـری‌کـه روی خط آهن ایستاده است، در لحظهٔ

$\frac{l_0}{c-v}$ می‌بیند (زیرا او در چارچوب قطار با سرعت v حرکت می کند).

در چارچوب مرجع وابسته به خط‌آهن، لحظهٔ روشن شدن نورافکن،

به انــدازهٔ زمان $\frac{l_0\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (۲۶.۲ را ببینید)، بعد از آن‌که مسافر وناظر روی خط‌آهن پهلو به پهلو قرار گیــرند، اتفاق می‌افتد (۱۹.۲ را ببینید).

بنابــراین ، در لحظهٔ روشن شدن نــورافکن، فاصلهٔ بین آن‌هــا $\frac{l_0\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

و فاصلهٔ از محل نورافکن تا ناظر برابر

$$l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{l_0\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

می‌شود. به این ترتیب، ناظر روی خط‌آهن ، روشنایی نورافکن را بعد از زمان $\frac{l_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ومسافــر، بعد از زمان $\frac{l_0}{c+v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ، یعنی مسافــر زودتر از ناظر روی راه‌آهن، می بیند.

با این محاسبه‌ها معلوم می‌شود که، نتیجهٔ حل مسأله، بستگی به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت ندارد.

۴۶.۲. در لحظهٔ رویداد درخشش نــور ، فاصلهٔ بین دو سفینهٔ فضایی برابر است با $2v\Delta t$ ؛ نور بعد از زمان $\frac{2v\Delta t}{c-v}$ ، یعنی درلحظهٔ

$$\Delta t+\frac{2v\Delta v}{c-v}=\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\Delta t$$

(طبق ساعت‌چارچوب مرجع لخت K) به‌سفینهٔ اول می‌رسد. بنابررابطهٔ(۱) از **۲۱.۲** ساعت سفینه، این زمان را نشان می‌دهد:

$$t_0=\Delta t\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\sqrt{1-\frac{c_2}{v^2}}$$

۴۷.۲. در چارچوب مرجع لخت وابسته به‌محورهای مختصات xy، لحظهٔ گسیل سیگنال رادیویی به‌طرف نقطهٔ O، از هر سفینه به‌ترتیب برابر است با

$$\tau_1=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}=2\tau_0,\qquad \tau_2=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}=3\tau_0$$

در ضمن، فاصلهٔ سفینه‌ها از نقطهٔ O به ترتیب برابر $v_1\tau_1=2\tau_0 v_1$ (برای سفینهٔ اول) و $v_2\tau_2=3\tau_0 v_2$ (برای سفینهٔ دوم) است. دراین‌صورت سیگنال رادیوئی از سفینه‌ها به‌ترتیب در لحظه‌های

$$t_1=\tau_1+\frac{2\tau_0 v_1}{c}=2\tau_0\left(1+\frac{v_1}{c}\right),\quad t_2=\tau_2+\frac{3\tau_0 v_2}{c}=3\tau_0\left(1+\frac{v_2}{c}\right)$$

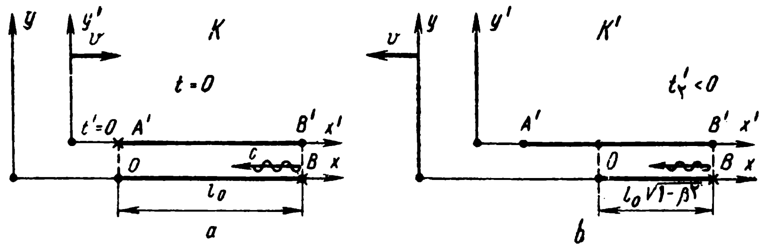
به نقطهٔ O می‌رسند.

چون $v_1=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ و $v_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}c$، پس $t_2>t_1$، یعنی سیگنال رادیوئی سفینه‌ای که سرعتش کمتر از v است، زودتر می‌رسد.

اگر تکنولوژی امروزی امکان ساختن چنین سفینه‌هایی را می‌داد، می‌توانستیم این مسأله را به‌صورت یک آزمایش طرح بریزیم و به‌طور مستقیم اثر نسبی بودن زمان را (بنابر نابرابری $t_2>t_1$) ثابت کنیم.

۴۸.۲. فرض کنید رویداد (A',O) ــ روشن‌شدن نورافکن لوکوموتیو (شکل ۵۴ـa)ــ در هرچارچوب مرجع لختی (لوکوموتیو یا ایستگاه K)، در لحظهٔ $t'=t=0$ اتفاق بیفتد. بنابر شرط مسأله، به‌ازای $t=0$ (طبق ساعت چارچوب مرجع لخت K)، چراغ سبز راهنما روشن می‌شود.

به‌چارچوب‌مرجع‌لخت K' ــچارچوب مرجع لوکوموتیو ــ می‌رویم. در آن نورافکن در لحظهٔ $t_1'=0$ و چراغ راهنما، بنابر رابطهٔ ناهم زمانی (رابطهٔ (۱) از ۲۶.۲)، زودتر و در لحظهٔ $t_2'=-\frac{l_0\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ روشن



شکل ۵۴

می‌شود. بنابراین (شکل ۵۴–b) داریم:

$$|A'O|=\frac{l_0\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\quad |A'B'|=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{l_0\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

بنابراین، زمان حرکت نور از نورافکن تا راننده، برابر است با

$$\tau'=\frac{|A'B'|}{c}=\frac{\frac{l_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

و راننده‌آن را (طبق ساعت خودش) در لحظهٔ

$$t'_3=-\frac{l_0\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\frac{l_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}>0$$

می‌روند، یعنی دیرتر از $t'_1=0$، که راننده‌نورافکن اتومبیل را روشن‌می‌کند.

۴۹.۰۲ چون در مسأله، صحبت بر سر حس شخصی ناظر است، باید آن را درچارچوب ساکن وابسته به او حل‌کرد (یعنی در چارچوب مرجع مربوط به‌خط آهن). در این صورت، ناچاریم از رابطهٔ ناهم‌زمانی استفاده کنیم، که منجر به‌محاسبه‌ای طولانی می‌شود.

ساده‌تر از همه این است کــه در چارچوب مرجع لوکوموتیو بحث کنیم، ولی قبل از آن، باید قانع شویم کــه نتیجهٔ مورد نظر، ناوردا است،

یعنی ترتیب رویدادها ــ رسیدن علامت‌ها به‌ناظر بستگی به‌انتخاب چارچوب مرجع لخت ندارد.

در واقع، از آن جا که در چارچوب ساکن ناظر، همهٔ رویدادها در یك نقطه و در چارچوب مرجع لــوكــومــوتیو در نقطه‌های مختلف اتفاق می‌افتند، بنابراین برای هر دو تا از آن‌ها رابطهٔ (۱) از ۲۱۰۲ برقرار است و، در نتیجه (۳۲۰۲ را ببینید)، بازه‌ای كه ایــن رویدادها را به‌هم مربوط می‌كند،همانندزمانی است؛ وبه‌خصوص برای چنین‌بازه‌ای، ترتیب‌رویدادها، ناوردا است.

به‌این ترتیب، در چارچوب مرجع لخت لوكوموتیو (K'):

الف) اگر ناظر در بخش انتهایی قطار باشد، ابتدا نور نزدیك‌ترین فانوس به‌خود را می‌بیند، مثلاً در $t'_3=0$، سپس نــور فانوس وسط را در لحظهٔ $t'_2=\frac{l_0}{2(c-v)}$ و سرانجام، نور فــانــوس لوكوموتیو را در لحظهٔ $t'_1=\frac{l_0}{c-v}$.

ب) اگر ناظر در بخش وسط قطار باشد، قبل از همه، نور فانوسی را كه بــه‌او نزدیكتر است، مثلاً در لحظهٔ $t'_2=0$، می‌بیند؛ بعد نور فانوس بخش انتهایی را در لحظهٔ $t'_3=\frac{l_0}{2(c+v)}$، وسپس، نورفانوس لوكوموتیو را، در لحظهٔ $t'_1=\frac{l_0}{2(c-v)}$.

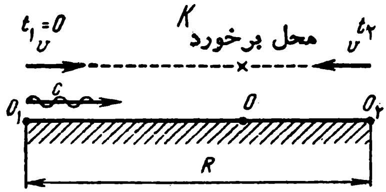
ج) وقتی ناظر كنار لوكوموتیو باشد، داریم:

$$t'_1=0\quad,\quad t'_2=\frac{l_0}{2(c+v)}\quad,\quad t'_3=\frac{l_0}{c+v}$$

۵۰۰۲. از فرض مسأله نتیجه می‌شود:

$$\tau_1<\frac{R}{v}\sqrt{1-\beta^2} \tag{1}$$

كه در آن، R، فاصلهٔ بین ایستگاه و مركز است (شكل ۵۵)؛ $\beta=\frac{v}{c}$.



شکل ۵۵

فرض‌کنیم، لحظهٔ حرکت ایستگاه خسارت دیده $t_1 = 0$ باشد. در این صورت،عزیمت سفینهٔ نجات در لحظهٔ $t_2 = \frac{R}{c} + \tau_2$ اتفاق‌می‌افتدکه،درآن، τ_2 عبارت است از زمان لازم برای آماده‌کردن سفینهٔ نجات.

اگر t، لحظهٔ زمانی متناظر با رسیدن سفینهٔ نجات وایستگاه به‌یکدیگر، در نقطهٔ O باشد، روشن است که از یك طرف $t = \frac{|O_1O|}{v}$ واز طرف‌دیگر، $t = \frac{|O_2O|}{v} + t_2$. بـه‌این ترتیب $\frac{|O_1O|}{v} = \frac{|O_2O|}{v} + \frac{R}{c} + \tau_2$. اگر دراین‌جا،رابطهٔ $R = |O_1O| + |OO_2|$ را به‌حساب آوریم، به‌دست‌می‌آید:

$$|O_1O_2| = \frac{1}{2}[R(1+\beta) + v\tau_2]$$

زمان لازم برای پرواز ایستگاه خسارت دیده تا رسیدن سفینهٔ نجات، برابر است با

$$\tau_0 = \frac{|O_1O|}{v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{2v}[R(1+\beta) + v\tau_2]\sqrt{1-\beta^2} \qquad (2)$$

برای نجات ایستگاه‌آسیب دیده، باید نابرابری

$$\tau_0 < \tau_1 \qquad (3)$$

برقرارباشد؛ از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، زمان نامعلوم τ_2 به‌دست‌می‌آید:

$$\tau_2 \leqslant \tau_1\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

۵۱۰۲. فرض می‌کنیم، ایستگاه فضایی و ستارگان برج جوزا،نسبت به یکدیگر ساکن و به فاصلهٔ R ازهم باشند. سن همزاد اول در برخورد با همزاد دوم چنین است:

$$\tau_{01}=\frac{R}{v}\sqrt{1-\beta^2}+\tau+t_0$$

که‌درآن، τ عبارت است از زمان بین حرکت دو سفینه و t_0، سن هر یك از دو برادر در لحظهٔ جدایی. سن همزاد دوم، در لحظهٔ دیدار چنین است:

$$\tau_{02}=\tau+\frac{R}{v}\sqrt{1-\beta^2}+t_0$$

بنا براین، $\tau_{01}=\tau_{02}$ (مستقل از t)، یعنی دو همزاد در لحظهٔ دیدار، با هم، هم‌سال‌اند.

۵۲۰۲. بنا بر اصل نسبیت، روز تولد فضانـورد، طبق زمان شخصی فضانورد، به اندازهٔ زمان T بعد از حرکت سفینه فرا می‌رسد (زیرا در هر چارچوب مرجع لخت، فرایندها، وازآن جمله فرایندهای زیستی، با آهنگی یکسان جریان می‌یابند)، یعنی $\tau_0=T$. لحظهٔ فرا رسیدن ایـن رویـداد در چارچوب مرجع ایستگاه، بـرابـر است با $\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ، یعنی $\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

بنابراین، سفینهٔ فضایی به‌اندازهٔ $\frac{vT}{\sqrt{1-\beta^2}}$ از ایستگـاه دور می‌شود. اگـر زمان لازم بعد ازعزیمت سفینه، برای گسیل سیگنال رادیوئی را Δt بگیریم، آن‌وقت، برای لحظهٔ رسیدن‌آن به‌سفینه (در چارچوب ایستگاه)، معادلهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta t+\frac{vT}{c\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

از این جا، زمان مجهول Δt، به‌دست می‌آید:

$$\Delta t=T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,,\ \beta=\frac{v}{c}$$

۵۳۰۲. مسأله را در چارچوب مرجع ایستگاه، کـه سفینه ازآن جا حرکت‌کرده است، حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم، فضانورددرادیوگرام مربوط به‌تولد نوه‌اش را درفاصلهٔ R ازایستگاه دریافت‌کرده باشد. در این‌صورت،

از فرض مسأله روشن است که $T=\frac{۲R}{c}$. چون $R=v\tau=\frac{v\tau_۰}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$، پس

$T=\frac{۲v\tau_۰}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$. اگر این مسأله را نسبت به v حل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$v=\frac{Tc}{\sqrt{۴\tau_۰^۲+T^۲}}$$

۵۴۰۲. فاصلهٔ مجهول را x می‌گیریم. دراین صورت، زمان حرکت همزاداول تا محل مأموریت، درچارچوب مرجع K (وابسته به‌زمین) برابر $\frac{x}{v}$ و زمان شخصی‌آن برابر $\frac{x}{v}\sqrt{۱-\beta^۲}$ است $\left(\beta=\frac{v}{c}\right)$. چـون سیگنال رادیوئی، فاصلهٔ x را در زمان $\frac{x}{c}$ طی می‌کند، بنابراین روشن است کـه سن همزاد دوم، قبل از سفر، برابر است با

$$t_۰+\frac{x}{v}+\frac{x}{c}$$

و سن همزاد دوم، درآغاز سفر برگشت، برابر است با

$$t_۰+\frac{x}{v}\sqrt{۱-\beta^۲}+\tau$$

که درآن‌ها، $t_۰$ عبارت است از سن هر یك از دو همزاد در لحظهٔ جدایی.

به‌این ترتیب، در چارچوب مرجع K، پرواز همزاد دوم از زمین در لحظهٔ $\frac{x}{v}+\frac{x}{c}$ و پرواز همزاد اول (به‌طرف دومی) درلحظهٔ $\frac{x}{v}+\tau$ پیـش آمده است. فرض می‌کنیم

$$\frac{x}{v}+\frac{x}{c}>\frac{x}{v}+\tau$$

وقتی کـه همـزاد اول سفر خود را آغـاز می‌کند، همزاد دوم بـه اندازهٔ

$x-v\Delta t_1$ از زمین فاصله دارد، که در آن

$$\Delta t_1=\left(\frac{x}{v}+\frac{x}{c}\right)-\left(\frac{x}{v}+\tau\right)$$

زمانی که از این لحظهٔ دیدار می‌گذرد، برابر است با

$$\Delta t_2=\frac{x-v\Delta t_1}{2v}=\frac{x\left(1-\frac{v}{c}\right)+v\tau}{2v}$$

بنابراین، سن دو همزاد در لحظهٔ دیدارآن‌ها، به‌ترتیب چنین است:

$$T_{01}=t_0+\frac{x}{v}\sqrt{1-\beta^2}+\tau+(\Delta t_1+\Delta t_2)\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(اولی)}$$

$$T_{02}=t_0+\left(\frac{x}{v}+\frac{x}{c}\right)+\Delta t_2\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(دومی)}$$

بنابر فرض مسأله: $T_{01}=T_{02}$، که از آن جا به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{v\tau}{1+\beta}$$

اگر در جریان حل مسأله فرض می‌کردیم:

$$\frac{x}{v}+\frac{x}{c}<\frac{x}{v}+\tau$$

بازهم به‌همین نتیجه می‌رسیدیم.

جمع‌بندی کوتاه از نتیجه‌گیری‌ها

نظریهٔ نسبیت خاص را، آلبرت انیشتین درسال ۱۹۰۵ مطرح کرد. این نظریه، نظام‌عام فیزیک نسبیتی را مشخص می‌کند. نظریهٔ‌نسبیت خاص، شامل اصل موضوع‌هایی است که به ویژگی‌های عمومی ماده، زمان و فضا در چارچوب‌های مرجع لخت مربوط می‌شوند: اصل نسبیت (هم‌ارزی فیزیکی همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت)، اصل ناوردایی سرعت متناهی ($c=\text{inv}<\infty$) ، فرض‌های مربوط به متناهی بودن سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت ($v<c$)، اصل‌های مربوط به‌اقلیدسی بودن،

همگنی و همسانگردی فضا و همگنی زمان.

ازمجموعهٔ اصل موضوع‌های نظریهٔ نسبیت‌خاص، مستقیماً نتیجه‌می‌شود:

۱) همسانگردی، ناوردایی و متناهی بودن (از بالا) سرعت مبنای c (برای ذره‌هایی که می‌توانند به‌چارچوب‌های مرجع لخت مربوط شوند)؛

۲) ویژگی‌های نسبیتی فضا و زمان:

رابطهٔ ناهم‌زمانی $\tau = \dfrac{l_{\circ}\dfrac{v}{c^{2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$ که معرف وردابودن‌هم‌زمانی‌است:

اگر درچارچوب مرجع لخت K' دو رویدادهم‌زمان در دوانتهای پاره‌خطی موازی بردار سرعت نسبی $\vec{v}$ اتفاق بیفتد، درچارچوب مرجع لخت K، این‌دو رویداد در فاصلهٔ زمانی τ اتفاق می‌افتند؛

رابطهٔ $t = \dfrac{t_{\circ}}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$، که در آن، $t_{\circ}$ عبارت‌است ازفاصلهٔ زمانی وقوع دو رویدادی که در یك چارچوب مرجع لخت، در نقطه‌ای پیش می‌آید؛

رابطهٔ $l = l_{\circ}\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}$، که در آن، l فاصلهٔ بین موقعیت‌های هم‌زمان دو انتهای پاره‌خط و $l_{\circ}$ طول پاره‌خط در چارچوبی که نسبت به‌آن ساکن است (پاره‌خط با بردار سرعت $\vec{v}$ موازی است)؛

رابطه‌های کلی (تبدیل‌های لورنتس) برای فاصله‌های زمانی و مکانی (نسبت به محورهای مختصات x، y و z)، برای دو رویدادی که در چارچوب‌های مرجع لخت K' و K باهم مقایسه شوند:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')\ ,\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^{2}}\Delta x'\right),\ \Delta y + \Delta y',$$

$$\Delta z = \Delta z';\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

۳) ویژگی‌های ناوردایی فضا و زمان:

فضای رویداد عبارت است از فضا ــ زمان چهار بعدی با متریك

$$S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \mathrm{inv}$$

که در آن، S به‌معنای بازهٔ دو رویداد است؛

حقیقت وجودی $S = \mathrm{inv}$، نتیجهٔ اصلی نظریهٔ نسبیت خاص و بیانگر اختلاف واقعی نظریهٔ نسبیت خاص با نظریهٔ نسبیت کلاسیك است؛ از $S^2 = \mathrm{inv}$ می‌توان همهٔ ویژگی‌های نسبی‌بودن فضا و زمان (تبدیل‌های لورنتس) را، که در بالا آوردیم، نتیجه گرفت.

§ ۳. سینماتیك نسبیتی

۳.۰۱. زمان حرکت ذره و سیگنال نوری، از دیوار A' به دیوار B' درآزمایشگاه K' (شکل ۹ را ببینید)، به ترتیب برابرند با $\tau'_1 = \frac{l_0}{u'}$ و $\tau'_2 = \frac{l_0}{c}$. بنابراین، زمان بین دو رویداد ــ رسیدن سیگنال نوری و ذره به‌دیوار B' در چارچوب مرجع لخت K'ــ چنین است:

$$\tau_0 = \tau'_1 - \tau'_2 = l_0\left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{c}\right) \qquad (1)$$

ذره وسیگنال نوری، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K،ضمن‌حرکت از دیوار A' به‌دیوار B'، به‌ترتیب به‌اندازهٔ

$$\tau_1 = \frac{l}{u - v} \quad , \quad \tau_2 = \frac{l}{c - v}$$

وقت صرف می‌کند، که در آن‌ها، $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$، و فاصلهٔ زمانی بین دو رویداد ــ رسیدن ذره و سیگنال نوری به‌دیوار B'ــ برابر است با

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{1}{u - v} - \frac{1}{c - v} \right) \qquad (2)$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱) از ۲۱۰۲، به‌این معادله می‌رسیم:

$$l_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\frac{1}{u - v} - \frac{1}{c - v} \right) = l_0 \left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{c} \right)$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

این رابطهٔ سینماتیك نسبیتی، قانون‌نسبیتی تبدیل سرعت نامیده‌می‌شود (به‌بیان دقیق‌تر: سرعت طولی در حالت $\vec{v} \parallel \vec{u}$، که در آن، $\vec{v}$، سرعت‌نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K است).

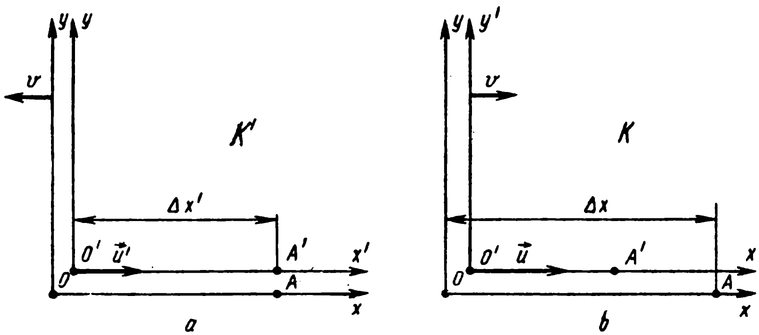
۲۰۳. فرض کنید در چارچوب مـرجع لخت K'، ذره با سرعت u' حرکت می‌کند (شکل ۵۶–a)، به‌نحوی‌که

$$\Delta x = u' \Delta t' \qquad (1)$$

روشن است‌که در چارچوب مرجع لخت K، قانون حرکت آن، چنین است:

$$\Delta x = u \Delta t \qquad (2)$$

نسبت بـه‌چارچوب مرجع لخت K، ذره بـه‌نقطهٔ A' نزدیك می‌شود (شکل ۵۶–b)، بنابراین



شکل ۵۶

$$\Delta t=\frac{|O'A'|_K}{u-v} \qquad (۳)$$

در چارچوب مرجع لخت K'، ذره به سمت نقطهٔ A حرکت می‌کند، یعنی

$$\Delta t'=\frac{|OA|_{K'}}{u'+v} \qquad (۴)$$

با فرض درست بودن رابطه‌های $|O'A'|_K=k\Delta x'$ و $|OA|_{K'}=k\Delta x$ (این رابطه‌ها هم‌ارزند با $l=kl_{\circ}$)، با توجه به رابطه‌های (۱) تا (۴) به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{v(u'+v)}{(۱-k^{۲})u'+v} \qquad (۵)$$

اگر در (۵) قرار دهیم $u'=c$ و $u=c$ (چون $c=\text{inv}$)، به‌دست می‌آید: $k:k^{۲}=۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}$ و بنابراین، از (۵) نتیجه می‌شود:

$$u=\frac{u'+v}{۱+\frac{u'v}{c^{۲}}}$$

۳۰۳. تبدیل‌های لورنتس را، با توجه به‌مسألهٔ **۲۸۰۲** می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}} \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad \Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^{۲}}\Delta x'}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}} \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\Delta t'+\frac{v}{c^{۲}}\Delta x'} \qquad (۳)$$

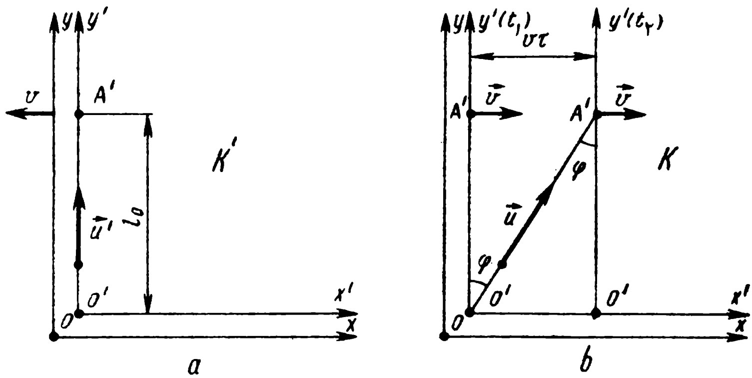
با فرض $\frac{\Delta x}{\Delta t}=u$ و $\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=u'$ (و یا $\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{\Delta x}{\Delta t}=u$، $\lim_{\Delta t'\to\circ}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=u'$

در حالت $u, u'\neq\text{const}$)، بعد از تقسیم صورت و مخرج سمت راست

عبارت (۳) بر $\Delta t'$، قانون نسبیتی تبدیل سرعت طولی به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{u'+v}{۱+\frac{u'v}{c^۲}}$$

۴۰۳. در چارچوب مرجع لخت K' (شکل a–۵۷)، زمان بین گسیل ذره از O' و ورود آن به A' برابر است با $\tau_۰=\frac{l_۰}{u'}$. نسبت به چارچوب مرجع لخت K، نقطهٔ A' با سرعت v حرکت می‌کند و برای رسیدن به آن، ذره باید تحت زاویهٔ φ نسبت به‌محور y حرکت کند. از شکل b–۵۷ نتیجه می‌شود: $l_۰^۲+v^۲\tau^۲=u^۲\tau^۲$، که در آن τ زمان حرکت ذره در چارچوب مرجع K است (همچنین به‌حساب آوردیم: $l_\perp=\mathrm{inv}$).



شکل ۵۷

اگر در این جا در نظر بگیریم که $\tau=\frac{\tau_۰}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$، به‌دست می‌آید:

$$u=\sqrt{u'^۲\left(۱-\frac{v^۲}{c^۲}\right)+v^۲} \qquad (۱)$$

چون $tg\varphi=\frac{v\tau}{l_۰}$، بنابراین

$$tg\,\varphi=\frac{v}{u'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

ب) تبدیل‌های لورنتس را برای نموهای y و t می‌نویسیم (درحالت حرکت ذره نسبت به‌محور y' در چارچوب مرجع لخت K'):

$$\Delta y=\Delta y',\ \ \Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

که در آن، $\Delta x'=0$ اختیار شده است. از رابطه‌های (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (2)$$

با فرض $\frac{\Delta y'}{\Delta t'}=u'_y$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}=u_y$ (u'_y و u_y عبارتند از تصویرهای بردار سرعت ذره در چارچوب‌های مرجع لخت K' و K، بر محور y یا y')، از (۲) حاصل می‌شود:

$$u_y=u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (3)$$

که عبارت است از قانون تصویر بردار سرعت ذره بر محور y.

خود بردارسرعت $\vec{u}$، درچارچوب مرجع لخت K، دارای مؤلفه‌های u_x و u_y است، در ضمن $u_x=v$ (زیرا $u'_x=0$). بنابراین

$$u^2=u_y^2+v^2,\ u=\sqrt{u'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+v^2}$$

۵۰۳. درچارچوب‌مرجع لخت K' داریم: $u'=u'_x>0$ و $u'_y=0$، یعنی ذره (یا سیگنال) در طـول محور Ox' ــ کـه بـرامتداد سرعت نسبی چارچوب‌های K' و K منطبق است ــ حرکت مـی‌کند. در ایـن صورت، سرعت ذره (یا سیگنال)، نسبت به‌چارچوب لخت K برابر است با

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$$

فرض کنید $u'<c$. در این حالت، نابـرابـری $u<c$ وقتی ممکن است که داشته باشیم: $\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}<c$، یعنی $\frac{v}{c}<1$. ازآن جا که نابرابری اخیر، از جمله‌اصل موضوع‌های نظریهٔ‌نسبیت خاص است، بنابراین ثابت می‌شودکه :

اگر در یـک چارچوب مرجع لخت، سرعت ذره (یا سیگنال) کمتر از سرعت مبنای c باشد، آن وقت، این حقیقت ناوردا خواهد بود، یعنی در هر چارچوب‌مرجع دیگری‌هم، سرعت ذره (یا سیگنال) مفروض، کمتراز c می‌شود.

به‌این مفهوم، سرعت مبنای c، از دیدگاه سینماتیک، حد سرعت را از بالا معلوم می‌کند (برای ذره‌ها و سیگنال‌هایی که سرعت آن‌ها، دست‌کم در یکی از چارچوب‌های مرجع لخت، کمتر از c باشد).

۶.۳ مضمون تبدیل‌های لورنتس و، بر اساس آن‌ها، قانون نسبیتی تبدیل سرعت (۳.۳ و ۴.۳ را ببینید) نشان می‌دهدکه، لزومی ندارد u' و u در رابطهٔ (۱) از مسألـهٔ ۳.۳، حتماً معرف سرعت ذره (یا سیگنال) باشند (به‌ترتیب در چارچوب‌های مرجع لخت K' و K). در حالت‌کلی می‌توان u' (یا u) را نسبت بازهٔ فضایی دو رویـداد (در چـارچـوب مرجع لخت مفروض) به‌فاصلهٔ زمانی‌آن‌ها دانست.

۷.۳ الف) اگردرچارچوب مرجع لخت K' داشته باشیم $u'>c$، آن وقت برای این‌که درچارچوب مرجع لخت K، نابرابری $u>c$ برقرار باشد، باید داشته باشیم: $\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}>c$ و یا هم‌ارزآن: $\frac{v}{c}<1$، که بنا بـر اصل موضوع ۳ نظریهٔ نسبیت خاص برقرار است.

به این ترتیب، اگر سرعت ذره در چارچوبی بزرگتر از سرعت مبنا باشد، در هر چارچوب دیگرهم، چنین خواهد بود. یعنی اگر ذره، دست‌کم دریك چارچوب، سرعتی بیش‌از c داشته باشد، آن‌وقت، سرعت c از دیدگاه

سینماتیك به سرعت پایین حدی تبدیل خواهد شد.

ب) فرض می‌کنیم، در چارچوب مرجع لخت K' داشته باشیم: $u'=\infty$ (در این جا، لزومی ندارد که u'، حتماً سرعت یك ذره باشد؛ ۶.۳ را ببینید). در این صورت

$$u=\lim_{u'\to\infty}\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}=\lim_{u'\to\infty}\frac{1+\frac{v}{u'}}{\frac{1}{u'}+\frac{v}{c^2}}=\frac{c^2}{v}$$

ج) به ازای $u'=-\frac{c^2}{v}$ (سرعت u'، درچارچوب‌مرجع K'، درجهت عکس سرعت $\vec{u}$ ــ سرعت نسبی چارچوب‌های K' و Kـ است)، به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{-\frac{c^2}{v}+v}{1-\frac{c^2v}{vc^2}}=-\infty$$

(علامت‌منفی نشان می‌دهد که جهت‌سرعت $\vec{u}$ ، همان جهت سرعت $\vec{u'}$ است).

د) اگر $u'=c$، آن وقت $u=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=c$ (متناظر با اصل موضوع $c=\mathrm{inv}<\infty$).

بنابراین سرعت مبنای c، مجموعهٔ همهٔ سرعت‌های ممکن (از نظر قدرمطلق) را به‌دو حوزه تقسیم می‌کند: (∞, c)ـ «فرانوری» و $(c, 0)$ـ «فرونوری» که، برای آن‌ها مرز مطلق حدی است، به این مفهوم که، تعلق سرعت ذره به‌یکی از این حوزه‌ها ($u<c$ یا $u>c$) از انتخاب نوع چارچوب مرجع لخت مستقل است.

پرسش مربوط به‌وجود ذره‌هایی در طبیعت، که با سرعت «فرانوری» حرکت می‌کنند، در صلاحیت نظریهٔ نسبیت خاص و فیزیك نسبیتی (به‌عنوان

یك دانش نظری) نیست. پاسخ بـه‌این پرسش را، تنها با آزمایش می‌توان داد. در نظریـهٔ نسبیت خاص ضرورت بستگی چـارچـوب مرجع لخت با ذره‌هایی‌که سرعت «فرونور» دارند، به‌اصل‌موضوعی تبدیل‌شده است(نسبت به‌چارچوب مرجع لخت مبداء: چارچوب ستارگان ثابت). ولی در این‌جا، به‌هیچ‌وجه، سرعت «فرانوری» منع نشده است.

۸۰۳. اگر در عبارت مربوط به مجذورهای بازه‌ها

$$S^{۲}=c^{۲}\Delta t^{۲}-\Delta x^{۲},\quad S'^{۲}=c^{۲}\Delta t'^{۲}-\Delta x'^{۲}$$

قرار دهیم: $u'=\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$ و $u=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$، به‌دست می‌آید:

$$S'^{۲}=(c^{۲}-u'^{۲})\Delta t'^{۲},\qquad S^{۲}=(c^{۲}-u^{۲})\Delta t^{۲}\qquad (۱)$$

چون $S'^{۲}=S^{۲}=\mathrm{inv}$ ، بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود:

الف) اگر $u'<c$،آن وقت $S'^{۲}>\circ$، بنابراین $S^{۲}>\circ$ و در نتیجه $u<c$ (۵۰۳ را ببینید). حرکت ذره‌ها بـا سرعت «فـرونـوری»، همچون رویدادهای متوالی، متناظر با بازهٔ همانند زمانی هستند ($S^{۲}>\circ$).

ب) اگر $u'>c$، یعنی $S'^{۲}<\circ$،آن‌گاه $S^{۲}<\circ$ و $u>c$ (۷۰۳ را ببینید). حرکت ذره‌ها با سرعت «فرانوری»، با بازهٔ همانند فضایی توصیف می‌شود ($S^{۲}<\circ$).

ج) اگر $u'=c$،آن‌وقت $S'^{۲}=\circ$ و،دراین‌صورت، $S^{۲}=\circ$ و $u=c$. موقعیت ذره‌هایی‌که با سرعت مبنا حرکت می‌کنند، در لحظه‌های مختلف، با بازهٔ صفر مشخص می‌شود.

به‌این ترتیب، از ناورداِئی نوع بازه بلافاصله، حدی بودن سرعت مبنا نتیجه می‌شود (۷۰۳ را ببینید).

۹۰۳. مجذور بازه برای رویدادهایی‌که به‌حرکت با سرعت $u'>c$ مربوط می‌شوند، در چارچوب مرجع لخت K' برابر است با

$$S'^{۲}=(c-u'^{۲})\Delta t'^{۲}<\circ$$

و در چارچوب مرجع لخت K:

$$S^{۲}=c^{۲}\Delta t^{۲}-\Delta x^{۲}<\circ$$

نابرابری اخیر، به‌ازای $\Delta t=\circ$ برقرار است‌که در این صورت

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\infty$$

روش دیگری هم برای اثبات وجود دارد که مستقیماً بر اساس قانون نسبیتی تبدیل سرعت استوار است:

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \qquad (1)$$

در این‌جا $u=\infty$ می‌گیریم و این پرسش را مطرح می‌کنیم که: آیا چارچوب مرجع لختی مثل K وجود دارد، به‌نحوی که چارچوب مرجع لخت K'، نسبت به‌آن، با سرعت $v<c$ حرکت کند.

به‌ازای $u=\infty$، از (۱) نتیجه می‌شود: $1+\frac{u'v}{c^2}=0$ ، زیرا $u'+v\neq 0$ ($u'>c$ و $v>c$). از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $v=-\frac{c^2}{u'}<0$، که در آن، سرعت منفی به معنای آن است که بردارهای $\vec{v}$، و $\vec{u'}$ در خلاف جهت یکدیگرند.

به این ترتیب، اگر در یك چارچوب مرجع لخت K'، ذره‌ای وجود داشته باشد که با سرعت u' ـ متناهی و بزرگتر از c ـ حرکت کند، همیشه می‌توان چارچوب مرجع لختی مثل K پیدا کرد که، در آن، ذرهٔ مفروض با سرعت بی‌نهایت حرکت کند ($u=\infty$).

ازآن جا که کمیت‌های نامتناهی در فیزیك، معنایی واقعی ندارند (قابل اندازه‌گیری نیستند)، استدلال فوق می‌تواند جدی‌ترین و اساسی‌ترین مبنای مخالفت با این اعتقاد باشد که، در طبیعت، امکان حرکت‌هایی باسرعت «فرانوری» وجود دارد (البته، در حوزهٔ درستی نظریهٔ نسبیت خاص و مفهوم‌های شناخته شدهٔ فیزیك امروزی)، زیرا تعبیر چنین حرکت‌هایی، در چارچوب اندیشه‌های معمولی فیزیك‌دانان ـ که حرکت هر ذره یا سیگنال را، انتقال انرژی یا آگاهی، با سرعتی متناهی می‌شناسد ـ میسر نیست.

۴۰۱۰ــ بنابر قانون نسبیتی تبدیل سرعت، سرعت ذرهٔ اول را نسبت

به‌ذرهٔ سوم پیدا می‌کنیم:

$$v_{۱۳}=\frac{v_{۱۲}+v_{۲۳}}{۱+\frac{v_{۱۲}v_{۲۳}}{c^{۲}}} \qquad (۱)$$

بر اساس این رابطه داریم:

$$\frac{c-v_{۱۳}}{c+v_{۱۳}}=\frac{(c-v_{۱۲})(c-v_{۲۳})}{(c+v_{۱۲})(c+v_{۲۳})} \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) به‌صورتی مبهم، معرف قانون نسبیتی تبدیل سرعتها ست.
اگر از ایـن رابطه، بـرای تعیین $v_{۱۴}$، $v_{۱۵}$، . . .، $v_{۱n}$ پشت سرهم استفاده کنیم، به‌این رابطه می‌رسیم:

$$\frac{c-v_{۱n}}{c+v_{۱n}}=\frac{(c-v_{۱۲})(c-v_{۲۳})\cdots(c-v_{n-۱,n})}{(c+v_{۱۲})(c+v_{۲۳})\cdots(c+v_{n-۱,n})} \qquad (۳)$$

اگر سمت چپ رابطهٔ (۳) را δ_n بنامیم و، در ضمن، از نماد حاصل ضرب استفاده کنیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{c-v_{۱n}}{c+v_{۱n}}=\delta_n=\prod_{i,k=۱,۲}^{n}\left(\frac{c-v_{ik}}{c+v_{ik}}\right)\ ,\quad i\neq k \qquad (۴)$$

ازآن جا

$$v_{۱n}=v_{۱}=\left(\frac{۱-\delta_n}{۱+\delta_n}\right)c \quad (n\geqslant ۲) \qquad (۵)$$

چون در رابطهٔ (۳) همهٔ عامل‌ها کمتر از واحدند، بنابراین $\delta_n<۱$،
در نتیجه $\frac{۱-\delta_n}{۱+\delta_n}<۱$ و $v_{۱n}<c$.

به‌ازای $n\to\infty$ داریم: $\delta_n\to ۰$ (به‌عنوان حاصل ضرب بی‌نهایت جملهٔ کوچکتر از واحد). در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} v_{۱n}=c$.

این مسأله ونتیجهٔ حاصل ازآن؛ عدم‌امکان به‌دست‌آوردن سرعت‌بالاتر از سرعت مبنا (و حتی برابرآن) را،آشکارا نشان می‌دهد.

۰۱۱۰۳ فرض‌کنید در چـارچـوب مرجع لخت K'، در یك لحظه، فاصلهٔ بین ذره‌ها بـرابر $\Delta x'$ باشد و بعد از زمان τ' به هم برسند. در این

صورت، مسیر یکی از آن‌ها $\Delta x'_1=v'_1\tau'$ و از آن دیگری $\Delta x'_2=v'_2\tau'$ می‌شود. چون $\Delta x'=\Delta x'_1+\Delta x'_2$، بنابراین $\Delta x'=(v'_1+v'_2)\tau'$. اگر درچارچوب مرجع لخت K'، سرعت نزدیك شدن ذره‌ها را، به‌عنوان سرعت تغییر فاصلهٔ بین‌آن‌ها، یعنی $V'=\dfrac{\Delta x'}{\tau'}$ تعیین کنیم، به دست می‌آید: $V'=v'_1+v'_2$.

در چارچوب مرجع لخت K، سرعت ذره‌ها، به‌ترتیب چنین‌اند:

$$v_1=\frac{v'_1+v}{1+\dfrac{v'_1v}{c}}\ ,\quad v_2=\frac{v'_2-v}{1-\dfrac{v'_2v}{c^2}}$$

از آن جا، سرعت نزدیك شدن ذره‌ها در چارچوب مرجع لخت K برابر است با

$$V=v_1+v_2=\frac{(v'_1+v'_2)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{v'_1v}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{v'_2v}{c^2}\right)}$$

به‌این‌ترتیب $V\neq V'$، یعنی $V\neq \mathrm{inv}$. به‌ازای $v'_1=v'_2=v=\frac{1}{2}c$ به‌دست می‌آید:

$$V'=c,\ \ V=\frac{4}{5}c$$

سرعت نزدیك شدن ذره‌ها، درچارچوب مرجعی که برای آن‌هاخارجی است (مثل حالت مورد بررسی ما)، از نظر معنای خود، سرعت یك شیء مادی نیست و، بنابراین، از لحاظ قدرمطلق خود، می‌تواند هر مقداری باشد (به‌بیان دقیق‌تر: $V\leqslant 2c$). با چنین سرعتی، چه در نظریهٔ نسبیت کلاسیك و چه در نظریهٔ نسبیت خاص، بارها برخورد داشته‌ایم. عبارت آن، به‌صورت مجموع جبری سرعت‌ها هیچ‌ربطی به‌قانون نسبیتی (وهمچنین قانون‌کلاسیك؛ ۲۱۰۱ را ببینید) تبدیل سرعت ندارد.

۱۲۰۳. حل با روش نسبیتی. الف) سرعت نزدیك شدن چشمه‌ها،

در چارچوب مرجع لخت K، برابر است با $V=v_1+v_2$؛ ب) سرعت نزدیك شدن موج‌های نوری برابر است با $C=2c$؛ ج) سرعت نزدیك‌شدن تابش یکی ازچشمه‌ها به‌چشمهٔ دیگر، در چارچوب مرجع لختK، به‌ترتیب برابر است با $c+v_1$ و $c+v_2$؛ در چارچوب مرجع لخت K_1 (یا K_2) برابر است با c؛ د) درچارچوب مرجع لخت K_1، چمشهٔ اول ساکن است، ولی چشمهٔ دوم با سرعت $\vec{u}$ به آن نزدیك می‌شود. بنابراین، در چارچوب مرجع لخت K، سرعت چشمهٔ دوم برابر است با

$$v_2=\frac{u-v_1}{1-\frac{uv_1}{c^2}}$$

(سرعت‌های $\vec{v}$ و $\vec{v_1}$ ، در جهت مخالف یکدیگرند). ازآن جا

$$u=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

حل با روش کلاسیك. الف) داریم: $V=v_1+v_2$؛ ب)

$$C=(c+v_1)+(c+v_2)=2c+(v_1+v_2)$$

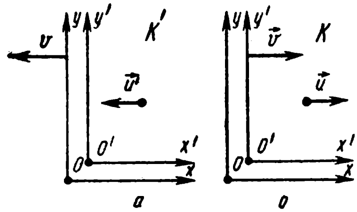
ج) در چارچوب مرجع لخت K:

$$C_1=(c+v_1)+v_2, \quad C_2=(c+v_2)+v_1$$

و در چارچوب مرجع لخت K_1 (یا K_2): $V_1=c+(v_1+v_2)$؛ د) در چارچوب مرجع لخت K: $v_2=u-v_1$ و بنابراین: $u=v_1+v_2$.

۱۳۰۳. فرض کنید در چارچوب مرجع لخت K' (شکل ۵۸-a)، ذره‌ای دارای سرعت $\vec{u'}$ باشد. سرعت $\vec{u'}$ را در خلاف جهت سرعت چارچوب مرجع لخت K' نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K می گیریم، در ضمن $v>u'$. دراین صورت، سرعت ذرهٔ مفروض در چارچوب مرجع‌لخت K، برابر خواهد بود با (شکل ۵۸-b).

$$u=\frac{v-u'}{1-\frac{u'v}{c^2}}$$



شکل ۵۸

از برابری $u=u'$، یعنی $u'=\frac{v-u'}{1-\frac{u'v}{c^{2}}}$، برای تعیین u'، به‌یک معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$\frac{v}{c^{2}}u'^{2}-2u'+v=0$$

که جواب آن

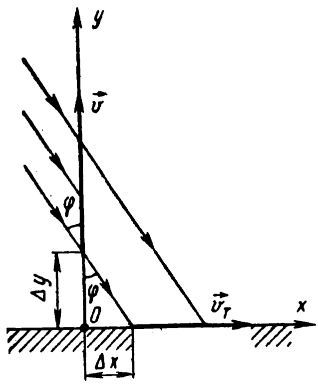
$$u'=\frac{c^{2}}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}\right) \qquad (1)$$

مقدار مورد نظر سرعت را بـه ما می‌دهد (جواب معادله را با توجه به‌شرط $u'<c$ انتخاب کردیم).

نتیجهٔ (۱) جالب است: اگـر سرعت مبنای c در همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، چه از لحاظ قدرمطلق و چه از نظر جهت، همسانگرد وناوردا باشد،آن وقت، سرعتی کـه بـه‌وسیلهٔ رابطهٔ (۱) معین می‌شود، تنها از نظر قدرمطلق ناوردا است، ولی از نظر جهت وردا است (شکل ۵۸–a و b را ببینید) و ناوردایی‌آن تنها برای دوچارچوب مرجع لخت تثبیت شده،ممکن است.

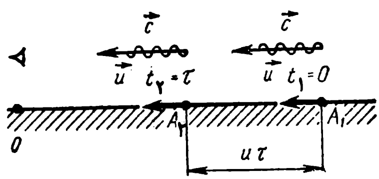
۱۴۰۳. از شکل ۵۹ بـه دست می‌آیـد: $\Delta x=\Delta y\, tg\,\varphi$. بنابراین سرعت سایهٔ مداد بـرابـر است با $v_T=v\, tg\,\varphi$. چـون $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ و $\infty\geqslant tg\,\varphi\geqslant 0$، بنابراین سرعت سایهٔ مداد می‌تواند مقدار دلخواه بزرگی باشد: $\infty>v\geqslant 0$. سرعت v_T، سرعت یك شیء مـادی نیست و بنابراین

نابرابری $v_T > c$، نظریهٔ نسبیت خاص را نقض نمی‌کند.



شکل ۵۹

۱۵.۳۰ فرض می‌کنیم، ذره بـه ناظر نزدیک شود. فـرض می‌کنیم، بـه ازای $t_1 = 0$، ذره در نقطهٔ A_1 و بـه ازای $t_2 = \tau$ در نقطهٔ A_2 باشد، به‌نحوی‌که $|A_1A_2| = u\tau$، که درآن، u سرعت ذره است (شکل ۶۰).



شکل ۶۰

ناظرکه در نقطهٔ O قرار دارد، ذره را در نقطه‌های A_1 و A_2 به‌ترتیب، در لحظه‌های $t_3 = t_1 + \frac{|OA_1|}{c}$ و $t_4 = t_2 + \frac{|OA_2|}{c}$ می‌بینند. به‌این ترتیب، زمان حرکت مشاهدهٔ ذره برابر است با

$$\Delta t = t_4 - t_3 = \tau - \frac{|A_1A_2|}{c}$$

اگر مفهوم سرعت ظاهـری ذره را، بـه‌عنوان کمیت $u^* = \frac{|A_1A_2|}{\Delta t}$ واردکنیم (برای نزدیک شدن ناظر و ذره به‌یکدیگر)، داریم:

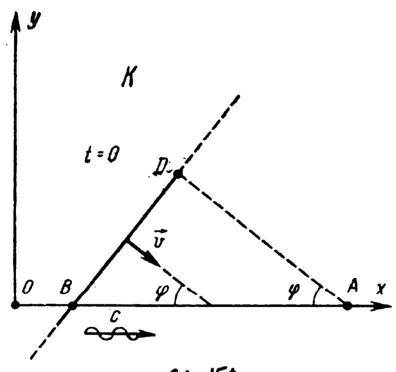
$$u_1^* = \frac{u}{1 - \frac{u}{c}} \qquad (1)$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که ذره از ناظر دور می‌شود. با استدلال مشابهی به‌دست می‌آید:

$$u_2^* = \frac{u}{1 + \frac{u}{c}} \qquad (2)$$

بحث. از عبارت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:
۱) $u_1^* \neq u$، $u_2^* \neq u$؛ ۲) چون $u < c$، پس $u_1^* > u$ و $u_2^* > u$؛ ۳) $u_1^* \xrightarrow[u \to c]{} \infty$ حد، $u_2^* \xrightarrow[u \to c]{} \frac{1}{2}c$ حد؛ ۴) $u_2^* < c$؛ ۵) به ازای $u < \frac{1}{2}c$، $u = \frac{1}{2}c$ و $u > \frac{1}{2}c$، به‌ترتیب داریم $u_1^* < c$، $u_1^* = c$ و $u_1^* > c$.

۱۶۰۳. به‌ازای $t = 0$، میله موضعی را اشغال می‌کند که در شکل ۶۱ نشان داده شده است. از نقطهٔ B سیگنال نوری خارج می‌شود و در لحظهٔ $t_1 = \frac{|AB|}{c}$ به‌نقطهٔ A می‌رسد. نقطهٔ محور D، به‌ازای $t_2 = \frac{|DA|}{v}$، به‌نقطهٔ A از محور می‌رسد. چون $|OA| = |AB| \cos\varphi$، پس



شکل ۶۱

$$t_2 = \left(\frac{c}{v} \cos \varphi\right) t_1 \qquad (1)$$

بحث. الف) نابرابری $t_1 < t_2$ وقتی امکان دارد که داشته باشیم: $\cos \varphi > \frac{v}{c}$ ب)؛ اگر $\cos \varphi < \frac{v}{c}$، آن‌گاه $t_1 > t_2$؛ در این حالت، نقطهٔ برخورد میله با محور x، سریع‌تر از سیگنال نوری حرکت می‌کند (و این، نظریهٔ نسبیت خاص را نقض نمی‌کند، زیرا این نقطه در لحظه‌های مختلف، متناظر با نقطه‌های مختلف میله است، یعنی در این‌جا، بحث بر سر سرعت یک شیء مادی معین نیست).

۱۷۰۳. اگر میله‌ها در یک جهت حرکت کنند، آن‌گاه چارچوب مرجعی مثل K'، وابسته به آن‌ها، وجود دارد که در آن، طول هر یک از میله‌ها برابر l_0 باشد. درحالتی‌که حرکت میله‌ها در خلاف جهت یکدیگر باشند، سرعت یکی از میله‌ها در چارچوب مرجع لخت دیگری، برابر است با $u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ و طول آن:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

۱۸۰۳. الف) در چارچوب مرجع لخت K (ایستگاه)، فاصلهٔ بین قسمت‌های انتهائی دو قطار، وقتی‌که لوکوموتیوهای آن‌ها در یک لحظه در برابر نگهبان قرار می‌گیرند، برابر است با $2 l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. بنابراین، زمان حرکت قطارها نسبت به‌یکدیگر، برابر می‌شود با

$$\tau_0 = \frac{2 l_0}{2v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ب) در چارچوب مرجع لخت K' (یکی از قطارها)، سرعت قطار

دیگر برابر است با $u=\dfrac{2v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$ و طول آن

$$l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{l_0\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$$

بنابراین، زمان مورد نظر، برابر است با

$$\tau=\left[l_0+\frac{l_0\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}\right]:\frac{2v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}=\frac{l_0}{v}$$

در نتیجه، جواب $\tau_0=\tau\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ حاصل می‌شود کــه روشن به‌نظر می‌رسد، زیرا τ_0 عبارت است از زمان بین رویــدادهای مورد نظر، که در چارچوب مرجع لخت K، در یك نقطه (جایی که نگهبان ایستاده است)، و در چارچوب مرجع لخت K'، در نقطه‌های مختلف، اتفاق می‌افتند.

۱۹۰۳. اگردوذره درجهت‌های‌مختلف مرجع لخت K،به‌سرعت‌هایی حرکت‌کنندکه مقدار مطلق‌آن‌ها برابر u باشد،آن وقت، سرعت نسبی آن‌ها (یعنی سرعت یك ذره درچارچوب مرجع دیگری)، طبق قانون نسبیتی‌تبدیل سرعت، به‌این ترتیب بیان می‌شود:

$$v=\frac{2u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}}$$

که ازآن‌جا، معادلهٔ زیر برای تعیین u، به‌دست می‌آید:

$$\frac{v}{c^2}u^2-2u+v=0$$

که جواب آن عبارت است از $u=\dfrac{c^2}{v}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right)$. به خصوص، این

جواب معادله را انتخاب کردیم که با شرط $u<c$ سازگار باشد.

۲۰.۴. الف) حل درچارچوب مرجع لخت K_1 (شکل ۱۱ را ببینید).

زمانی که ساعت ۲ در نقطهٔ A نشان می‌دهد، عبارت است از $\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

(طبق‌رابطهٔ(۱)ازمسألهٔ **۲۱.۴**. در اینجا $\tau=\frac{l_0}{v}$ و $\tau_{02}=\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$).

بنابر شرط مسأله، ساعت ۳ هم در نقطهٔ A، همان زمان را نشان می‌دهد. یعنی ساعت ۳ در نقطهٔ O، زمان $\tau_{03}=\frac{2l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ را مشخص می‌کند، ولی

زمان ساعت ۱ چنین است: $\tau_{01}=\frac{2l_0}{v}$. اختلاف زمان آن‌ها، ضمن تطبیق فضایی آن‌ها (در نقطهٔ O از چارچوب مرجع لخت K_1) برابر است با

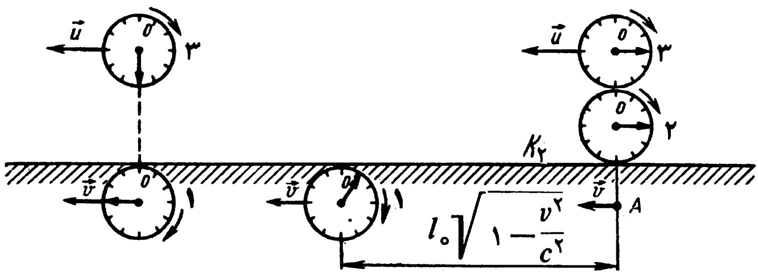
$$(\Delta t_{13})_{K_1}=\tau_{01}-\tau_{03}=\frac{2l_0}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

ب) حل در چارچوب مرجع لخت K_2 (شکل ۶۲). ساعت ۳ در چارچوب مرجع K_2 با سرعت $u=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ حرکت می‌کند. ضمن تطبیق

فضایی و بنا بر شرط مسأله، ساعت‌های ۲ و ۳ یك زمان را نشان می‌دهند، یعنی روی ساعت ۳ (و همچنین روی ساعت ۲): $\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ است. از این لحظه، در فاصلهٔ $l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ از ساعت ۳ واقع است، بنابراین، ساعت ۳ بعد از زمان

$$\frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{u-v}=\frac{l_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

به‌ساعت ۱ می‌رسد (درچارچوب مرجع K_2). بنابراین، ساعت ۱، این زمان را نشان می‌دهد:



شکل ۶۲

$$\tau_{۰۳}=\frac{l_۰}{v}\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}+\frac{l_۰\left(۱+\frac{v^۲}{c^۲}\right)\sqrt{۱-\frac{u^۲}{c^۲}}}{v\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}=\frac{۲l_۰}{v}\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}$$

چون در این حال، ساعت ۱ به‌فاصلهٔ

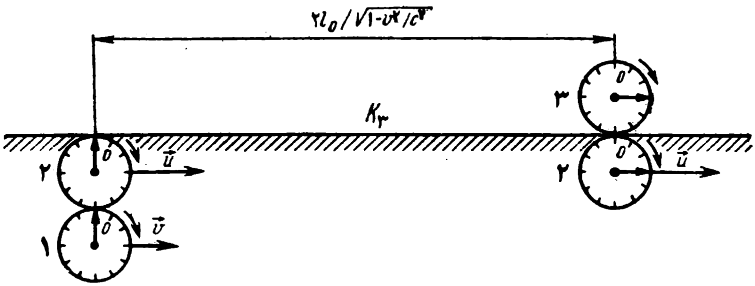
$$\frac{l_۰\left(۱+\frac{v^۲}{c^۲}\right)}{v\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}v+l_۰\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}=\frac{۲l_۰}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$$

از ساعت ۲ قرار دارد، این زمان را نشان می‌دهد:

$$\tau_{۰۱}=\frac{۲l_۰}{v\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}=\frac{۲l_۰}{v}$$

به‌این ترتیب: $(\Delta t_{۱۳})_{K_۲}=\tau_{۰۱}-\tau_{۰۳}=\frac{۲l_۰}{v}\left(۱-\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}\right)$

ج) حل در چارچوب مرجع لخت $K_۳$ (شکل ۶۳). ساعت ۳ ضمن برخورد با ساعت ۲، بـه زبـان اختصاصی خـودش، زمان $\frac{l_۰}{v}\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}$ را نشان می‌دهد؛ ساعت ۲ هم، همین زمان را مشخص می‌کند. یعنی درابتدا (در لحظهٔ تطابق فضایی با ساعت ۱)، ساعت‌های ۲ و ۱، در فاصلهٔ



شکل ۶۳

$$\frac{\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{2l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

از ساعت ۳ قرار دارند، که در آن، $u=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ عبارت است از سرعت ساعت ۲ در چارچوب مرجع لخت K_3. بنابراین، ساعت ۱ وقتی به ساعت ۳ برخورد می‌کند، این زمان را نشان می‌دهد:

$$\tau_{01}=\frac{2l_0}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2l_0}{v}$$

چون وقتی ساعت‌های ۲ و ۱، در یك جا قرار دارند، ساعت ۳ زمان

$$\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{2l_0}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{2l_0\frac{v^2}{c^2}}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

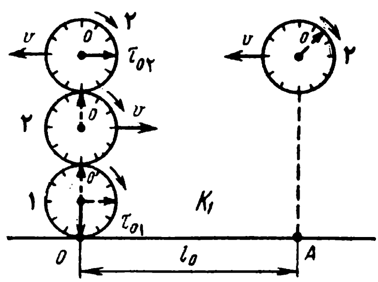
را نشان می‌دهد، بنابراین در برخورد با ساعت ۱، زمان برابر است با

$$\tau_{03}=-\frac{2l_0\frac{v^2}{c^2}}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{2l_0}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

در این صورت: $(\Delta t_{12})_{K_2}=2\frac{l_0}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$.

به ایـن ترتیب: $\Delta t_{12}=\mathrm{inv}$: اختلاف زمان ساعت‌ها (زمان‌های اختصاصی)، ضمن انطباق فضایی آن‌ها، بستگی به انتخاب چارچوب مرجع لخت ندارد.

۲۱.۳. «پارادوکس ساعت‌ها» چنین است: درچارچوب مرجع لخت K_1، ساعت ۱ ساکن و ساعت ۲ با سرعت v حرکت می‌کند. وقتی این دو ساعت از نظر فضایی برهم منطبق شوند، زمانی یکسان و مثلاً ۰ را نشان می‌دهند. ساعت ۲ مسافتی برابر l_0 را طی می‌کند و بـه‌طرف ساعت ۱ برمی‌گردد؛ در برخورد مجدد، بازهم زمان یکسانی را نشان مـی دهند (شکل ۶۴). فرض می‌کنیم، زمان شتاب‌دار ساعت ۲ (ضمن چرخش ۱ کوچك باشد، درمقایسه با زمان حـرکت یکنواخت، بتوان از آن صرف نظر کرد)، در این صورت، ساعت‌های ۱ و ۲ ضمن برخورد، این زمان را نشان می‌دهند:



شکل ۶۴

$$\tau_{01}=\frac{2l_0}{v}\quad,\quad \tau_{02}=\frac{2l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;;\;\tau_{02}<\tau_{01}$$

$$(\Delta t_{12})_{K_1}=\tau_{01}-\tau_{02}=\frac{2l_0}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\qquad(1)$$

ولی، از نظر سیستماتیك، هیچ کدام از دو ساعت ۱ و ۲، امتیازی بر دیگری ندارد. مـی‌توان ساعت ۲ را ساکن و ساعت ۱ را، بـا سرعت v،

متحرك دانست (با بررسی درچارچوپ مرجع K_2 وابسته به ساعت ۲). آن وقت، اگر همان بحث بالا را تکرار کنیم، به‌رابطه‌ای متناقض با رابطهٔ (۱) می‌رسیم، یعنی معلوم می‌شود که، ضمن برخورد ساعت ۱و۲، زمانی کمتر از زمان ساعت ۲ را نشان می‌دهد. این موقعیت،که در برخورد اول عجیب به نظر می‌آید، در نظریهٔ‌نسبیت‌خاص، به«پارادوکس ساعت‌ها» معروف‌شده‌است.

در ۲۰۵۰۳ نشان دادیم که هم ازنظراندازه وهم ازنظرعلامت، در هر چارچوب‌مرجع‌لخت‌داریم: $\Delta t_{12}=\mathrm{inv}$. ولی‌چارچوب مرجع$K_2$، اساساً یك چارچوب لخت‌نیست، زیرا‌ساعت ۲، بنابرفرض، دربخشی اززمان‌نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K_1 ساعت ۱، باشتاب حرکت می‌کند. بنابراین‌در طرح مساله ، با عدم تقارن دینامیکی ساعت‌های ۱ و ۲ مواجه می‌شویم که پارادوکس را حل می‌کند.

در نظریهٔ نسبیت خاص (و نیــز در نظریــهٔ نسبیت کــلاسیك) برای چارچوب‌های مرجع نالخت، پایه‌ای وجود ندارد؛ و مطالعهٔ‌آن‌ها در شرایط فضا ــ زمان نظریهٔ نسبیت خاص، باید به‌صورتی خاص انجام گیرد.

در حوزهٔ نظریهٔ نسبیت خاص می‌توان به‌این ترتیب بحث کرد:

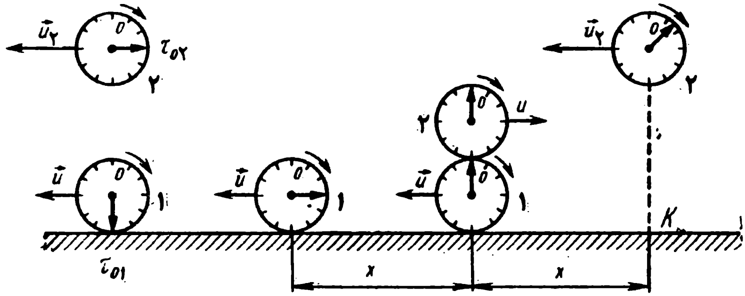
۱) ساعت ۲ را، در یك لحظه، ابــا چــارچوب‌های مرجع‌لخت K_c ــ که وابسته‌به‌ساعت۲، ولی غیرازچارچوب مرجع K_2 است‌ــ تطبیق‌می‌دهیم؛ این چارچوب، لخت است ودرلحظه‌های مختلف حرکت شتاب‌دار، متفاوت است (در هر یك از این لحظه‌ها، ساعت ۲ نسبت به چارچوب مرجع لخت خاصی از K_c، بی‌حرکت است)؛ سپس، حرکت ساعت ۱، یعنی چارچوب مرجع لخت K_1 را، نسبت به‌ایــن مجموعهٔ چارچوب‌های مرجع لحت K_c بررسی‌می‌کنیم؛ روشن است که نتیجه همان چیزی خواهد بود که رابطهٔ (۱) به‌دست‌داده‌است، یعنی، برای‌همهٔ‌چارچوب‌های مرجع‌لخت: $\Delta t_{12}=\mathrm{inv}$.

۲) تمامی پدیده را در چارچوب مرجع لخت K،که ساعت‌های ۱و ۲ نسبت به آن، سرعت یکسانی دارنــد (۱۹۰۳ را ببینید) بررسی می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، ازهمان ابتدا با تقارن کامل سروکار خواهیم داشت.

محاسبهٔ تفصیلی را در چارچوب مرجع لخت K انجام می‌دهیم (شکل ۶۵). در این چارچوب، سرعت هر یك از ساعت‌های ۱ و ۲، برابر است با

(۱۹۰۳ را ببینید):

$$u=\frac{c^{2}}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}\right) \qquad (2)$$



شکل ۶۵

فرض می‌کنیم حرکت برگشت ساعت ۲ وقتی آغاز می‌شود که فاصلهٔ آن از ساعت ۱ بـرابـر $2x$ باشد. در این لحظه، ساعت‌های ۱ و ۲ زمان خاص خود را، $\frac{x}{u}\sqrt{1-\frac{u^{2}}{c^{2}}}$، نشان‌می‌دهند. سرعت ساعت ۲، ضمن حرکت در جهت عکس، از معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{u_2-u}{1-\frac{u_2 u}{c^{2}}}=v, \quad u_2=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^{2}}} \qquad (3)$$

زمان حرکت برگشت ساعت ۲، تا برخورد با ساعت۱، درچارچوب لخت K، عبارت است از $\frac{2x}{u_2-u}$، و این زمان را نشان می‌دهد:

$$\tau_{02}=\frac{x}{u}\sqrt{1-\frac{u^{2}}{c^{2}}}+\frac{2x}{u_2-u}\sqrt{1-\frac{u_2^{2}}{c^{2}}}=-\frac{4x\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}{v\sqrt{1-\frac{u^{2}}{c^{2}}}} \qquad (4)$$

اگر در نظر بگیریم:

$$\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}=\frac{x}{u}\sqrt{1-\frac{u^{2}}{c^{2}}}$$

(زیرا زمان ساعت ۲ در نقطهٔ برگشت، در همهٔ چارچوب‌های مرجع لخت، یکی است)، از (۴) به‌دست می‌آید:

$$\tau_{02}=\frac{2l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (5)$$

که در آن، $2l_0$ عبارت است از مسیر ساعت ۲ در چارچوب مرجع لخت K_1 (ساعت ۱). وقتی که ساعت ۱ به ساعت ۲ می‌رسد، این زمان را نشان می‌دهد:

$$\tau_{01}=\frac{x}{u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{2x}{u_2-u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{4x}{v\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (6)$$

و یا با در نظر گرفتن برابری

$$\frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{x}{u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

خواهیم داشت:

$$\tau_{01}=\frac{2l_0}{v} \qquad (7)$$

به‌این ترتیب، نتیجه‌های (۵) و(۷) چنان‌اند که گویی آن‌ها را به‌عنوان پدیده‌ای درچارچوب مرجع لخت K_1 بررسی کرده باشیم. و این‌هم، موضوع شگفتی نیست، زیرا زبان اختصاصی ساعت‌ها، ناوردا است.

حل‌مسألهٔ «پارادوکس‌ساعت‌ها» درچارچوب مرجع‌لخت K، نامتقارن‌بودن ساعت‌های ۱ و ۲ را، به‌وضوح نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری‌های کوتاه:

اساسی‌ترین مطلب، درسینماتیك نسبیتی، عبارت است از قانون‌نسبیتی تبدیل سرعت:

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \qquad (1)$$

که حکم مربوط به‌حدی بودن سرعت مبنا برای هر فرایندی، درآن نهفته است (اگر $u'<c$، آن‌گاه $u<c$؛ اگر $u'=c$، آن‌گاه $u=c$؛ اگر $u'>c$، آن‌گاه $u>c$).

رابطهٔ (۱) در مفهومی گسترده‌تر، قانون تبدیل را برای کمیت‌های $u'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$، $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به‌دست می‌دهد، که درآن‌ها، $(\Delta x',\Delta t')$ و $(\Delta x,\Delta t)$ به‌ترتیب عبارتند ازبازهٔ فضایی و بازهٔ زمانی در چارچوب‌های مرجع لخت K' و K، برای هر دو رویداد دلخواه (Δx و $\Delta x'$، با سرعت نسبی چارچوب‌های مرجع لخت K' و K موازی‌اند). در این صورت، شرط $u'>c$ به دو رویدادی مربوط می‌شود که با بازهٔ همانند فضایی ازهم جدا شده‌اند. برای این حالت، مفهوم ترتیب زمانی رویدادها، وردا است و، بنابراین، می‌توان چارچوب مرجع لخت K را چنان پیدا کرد که درآن، این دو رویداد به‌طور هم‌زمان اتفاق بیفتند، یعنی داشته باشیم: $u=\infty$.

نظریهٔ نسبیت خاص، وجودذره‌های فرانوری‌را درطبیعت نفی‌نمی‌کند. با وجود این، تصورآن‌ها، از حوزهٔ نظام شناخته شدهٔ علیت و دیدگاه‌های فیزیك امروزی بیرون است.

برای ترکیب چند حرکت نسبی، این رابطه برقرار است:

$$u_{1n}=\left(\frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}\right)c \qquad (۲)$$

که درآن $\delta_n=\prod\limits_{i,k=1,2}^{n}\left(\frac{c-v_{ik}}{c+v_{ik}}\right)$ ($i<k$)، v_{ik} سرعت i امین ذره نسبت به kامین ذره و v_{1n} سرعت اولین ذره نسبت به nامین ذره است).

از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود: $v_{1n}<c$، یعنی نتیجهٔ ترکیب تعداد محدودی حرکت نسبی نمی‌تواند به‌سرعت مبنا برسد.

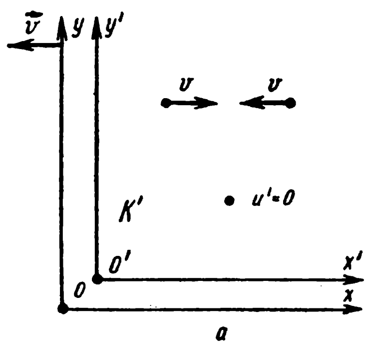
اگر دو ذره به هم نزدیك یا از هم دور شوند و سرعت آن‌ها در چارچوب مرجع لخت K به‌ترتیب v_1وv_2 باشد، آن‌وقت کمیت $V=v_1\pm v_2$، تنها خصلت فرایند مفروض را مشخص می‌کند، ولی البته نمی‌توان آن را سرعت یك شیء مادی دانست: $V\leqslant 2c$. رابطهٔ مجموع جبری سرعت‌ها،

بدون ارتباط با قانون تبدیل سرعت، هم در نظریهٔ نسبیت کلاسیك و هم در نظریهٔ نسبیت خاص برقرار است.

§ ۴. دینامیك نسبیتی

۴.۱۰ این آزمایش ذهنی را در نظر می‌گیریم: در چارچوب مرجع لخت K'، دوجسم شبیه هم، با سرعت‌های $\vec{v}$ و $-\vec{v}$ به‌طرف یکدیگرحرکت می‌کنند (سرعت چارچوب مرجع لخت K' را هم، نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K، $\vec{v}$ مـــی گیریـــم؛ شکـــل ۶۶). برخورد ناکشسان، بین آن‌ها اتفاق می‌افتد. سرعت جسم مرکب حاصل، بعد ازبرخورد، $u' = 0$ می‌شود. قانون بقای اندازهٔ حرکت را در چارچوب مرجع لخت K، برای سیستم مفروض این جسم‌ها می‌نویسیم: $mv_1 = 2mu$، از آن جا

$$v_1 = 2u \qquad (1)$$



شکل a-۶۶

که در آن، v_1 سرعـــت جسم ۱ قبل از برخورد ($v_2 = 0$) و u سرعت جسم مرکب، بعد از برخورد است.

در سینما تیك کلاسیك داریم: $v_1 = 2v$ و $u = u' + v = v$، که متناظر است با رابطهٔ (۱).

بنابر قانون نسبیتی تبدیل سرعت داریم:

$$v_1=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\ ,\ u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}=v$$

(به‌ازای $u'=0$)، که با (۱) متناقض است.

بنابراین، رابطهٔ اندازهٔ حرکت کلاسیك، به‌صورت حاصل ضرب جرم جسم در بردار سرعت آن، با سینماتیك نسبیتی سازگار نیست و، بنابراین، نمی‌توان آن را در نظریهٔ نسبیت کلاسیك به‌کار برد.

۲.۴. از $m\vec{a}=\vec{F}$، به ازای $\vec{F}=\text{const}$ و $m=\text{const}$ نتیجه می‌شود: $\vec{a}=\text{const}$. آن‌وقت، قانون تغییر سرعت ذره چنین‌است:

$$v=v_0+at \qquad (1)$$

به‌ازای $v_0<c$ و شتاب متناهی a، از (۱) به‌دست می‌آید:

اگر $t<\frac{c-v_0}{a}$، آن‌گاه $v<c$

اگر $t=\frac{c-v_0}{a}$، آن‌گاه $v=c$

اگر $t>\frac{c-v_0}{a}$، آن‌گاه $v>c$ (۲)

اگر $t\to\infty$، آن‌گاه $v\to\infty$

فرایند شتاب ذره را می‌توان همچون عبور متوالی ازچارچوب‌مرجع لخت، به‌چارچوب دیگر دانست. از آن جا که بنابر سینماتیك نسبیتی، با تغییر چارچوب مرجع لخت، سرعت فرونور نمی‌تواند برابر یا بزرگتر از سرعت مبنا بشود، بنابراین عبارت‌های (۱) و (۲) و، در نتیجه، قانون $m\vec{a}=\vec{F}$ با نظریهٔ نسبیت خاص سازگار نیست.

۳.۴. به‌آزمایش ذهنی مسألهٔ ۱.۴ برمی‌گردیم و، برای چارچوب مرجع لخت K'، تغییرانرژی جنبشی سیستم جسم‌ها را، که درنتیجهٔ برخورد

آن‌ها حاصل می‌شود، می‌نویسیم. چون $E'_{k_1} = 2\frac{mv^2}{2}$ و $E'_{k_2} = 0$، پس

$$\Delta E'_k = E'_{k_2} - E'_{k_1} = -mv^2$$

روشن است که کاهش انرژی جنبشی سیستم جسم‌ها، به‌معنای بالا رفتن انرژی درونی آن‌هاست، که باید آن را کمیتی ناوردا به‌حساب آورد:

$$-\Delta E'_k = \Delta E_0 = \text{inv}.$$

در سینماتیك كلاسیك می‌توان، در چارچوب لخت K، به‌این ترتیب بحث کرد: چون

$$E_{k_1} = \frac{m}{2}(2v)^2 = 2mv^2 \quad , \quad E_{k_2} = \frac{(2m)v^2}{2} = mv^2$$

بنابراین $\Delta E_k = -mv^2$، یعنی $\Delta E_k = \Delta E'_k = \text{inv}$.

ولی برای سینماتیك نسبیتی داریم:

$$E_{k_1} = \frac{m}{2}\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 = \frac{2mv^2}{1+\frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad E_{k_2} = \frac{(2m)v^2}{2} = mv^2,$$

$$\Delta E_k = \Delta E_{k_2} - \Delta E_{k_1} \neq -mv^2 \;\; ; \;\; \Delta E \neq \Delta E'_k$$

نتیجهٔ اخیر، ناوردایی انرژی درونـی را نقض می‌کند. بنابراین در دینامیك نسبیتی باید بیان دیگری برای انرژی جنبشی پیدا کرد کـه هم با نظریهٔ نسبیت خاص سازگار باشد و هم با شرط $E_0 = \text{inv}$.

۴.۴. فاصلهٔ دو ذرهٔ ۱ و ۲ را که به اندازهٔ کافی از هم دورند، r_{12} می‌گیریم و فرض می‌کنیم با نیرویی که به‌مقدار r_{12} بستگی دارد (مثلاً طبق قانون $F_{12} \approx r_{12}^{-2}$)، برهم‌کنش داشته باشند. اکنون اگر در لحظه‌ای، جای یکی از ذره‌ها تغییر کند و، در نتیجـه، فاصلهٔ بین آن‌ها r_{12} دیگـری شود، برابری $F_{12} = F_{21}$ (بنابر قانون سوم نیوتون) نمی‌تواند ، در این لحظه، برقرار باشد، زیرا برقراری این برابری به‌معنای آن است که برهم‌کنشی یك ذره با دیگری، باید فوری‌وآنی باشد. ولی تأثیر آنی، از نظر فیزیکی بی‌معنا و با نظریهٔ نسبیت خاص ناسازگار است، زیرا در این نظریه، مقدار متناهی سرعت مبنای c، حداکثر سرعت برای فرایندهایی است که تاکنون درفیزیك

شناخته شده است.

۵.۴. قانون گرانش نیوتونی ($F=kr_{12}^{-2}$ که در آن $k=Gm_1m_2$، G ثابت گرانشی، m_1 و m_2 جرم‌های متناظر نقطه‌های مادی و r_{12} فاصلهٔ بین آن‌ها) و قانون کولن ($F=kr_{12}^{-2}$، که در آن، $k=n_0q_1q_2$، $n_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ و q_1 و q_2 بارهای نقطه‌ای)، قانون کلاسیك هستند، به این معنا که با فرض تأثیر فوری گرانش و الکتریسیته بنا شده‌اند، زیرا تغییر فاصله در یك لحظهٔ مفروض، به‌معنای تغییر آنی برهم‌کنش گرفته شده است.

۶.۴. اندازهٔ حرکت نسبیتی ذره را به‌صورت

$$\vec{p}=\gamma m\vec{v} \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم که در آن، $\vec{v}$ سرعت ذره در چارچوب مرجع لخت مفروض و m جرم آن باشد. در ضمن $m=\text{inv}$ (و $m=\text{const}$)، $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

اگر قانون اصلی دینامیك را به‌صورت

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\vec{F} \tag{2}$$

بنویسیم، به‌سادگی روشن می‌شود که (۲) نمی‌تواند به‌بیان کلاسیك $m\vec{a}=\vec{F}$ منجر شود.

فرض کنید نیروی ثابت $\vec{F}=\text{const}$، بر ذره وارد آید. در این صورت، از (۲) نتیجه می‌شود:

$$\Delta p=F\Delta t,\ \ \Delta p=\Delta(Ft)\Rightarrow\Delta(p-Ft)=0$$

یعنی $p-Ft=C=\text{const}$. اگر به‌ازای $t=0$ داشته باشیم: $p=0$، آن وقت خواهیم داشت: $C=0$ و بالاخره $p=Ft$ یا $\gamma mv=Ft$. ولی روشن است که، درنزدیکی لحظهٔ $t=0$، قانون کلاسیك $ma_0=F$ برقرار است (زیرا به‌ازای $v\ll c$ داریم: $p=mv$)، که در آن، a_0 شتاب درنخستین

لحظهٔ تأثیر نیروی ثابت F است. به‌این ترتیب $\gamma mv = ma_0 t$ که از آن‌جا می‌توان سرعت را پیدا کرد:

$$v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}} \qquad (3)$$

از بیان (۳) نتیجه می‌شود: $\lim_{t\to\infty} v = c$، یعنی سرعت ذره‌ای که از طریق نیرویی ثابت شتاب پیدا می‌کند، تنها در زمان نامتناهی می‌تواند به‌سرعت مبنا برسد، در غیر این صورت، هرگز به چنین سرعتی نمی‌رسد. این نتیجه با نظریهٔ نسبیت خاص کاملاً سازگار است و، بنابراین، می‌توان عبارت‌های (۱) و (۲) را برای دینامیك نسبیتی معتبر دانست.

۷۰۴. اگر ذره‌ای به جرم m $(m = \text{inv})$ با سرعت $\vec{v}$ حرکت کند، علاوه بر اندازهٔ حرکت $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ $\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$، دارای انرژی‌هم خواهد بود که آن را به‌این ترتیب معین می‌کنیم:

$$E = \gamma mc^2 \qquad (1)$$

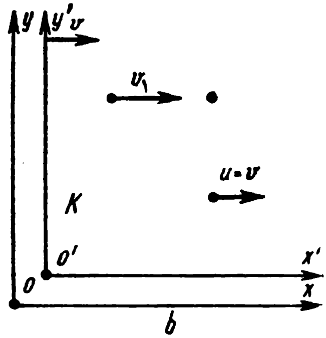
از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای $v = 0$ داریم $E = E_0 = mc^2$.

این فرض طبیعی است که مقدارهای $\vec{p}$ و E را برای سیستم جداگانه‌ای از ذره‌ها، ثابت بدانیم (که البته می‌تواند در داخل سیستم جا به جا شود). عدم تناقض متقابل رابطه‌های مربوط بــه‌اندازهٔ حرکت نسبیتی و انرژی کل (۱) ذره‌ها را، روی مثال برخورد مرکزی ناکشسان دو ذره روشن می‌کنیم (شکل ۶۶-a را ببینید).

در چارچوب مرجع لخت K'، قــانــون‌های بقای اندازهٔ حرکت و انرژی را، به‌این صورت می‌نویسند:

$$\begin{cases} \gamma mv - \gamma mv = Mu' \ , \ u' = 0 \\ 2\gamma mc^2 = Mc^2 \end{cases} \qquad (2)$$

که در آن‌ها M عبارت است از جرم جدید ذرهٔ مرکب، کــه از ترکیب دو



شکل b-۶۶

ذرهٔ نخستین تشکیل شده است. ذرهٔ مرکب، بعد از برخورد، با سرعت v حرکت می‌کند (شکل b-۶۶). بنابراین، قانون‌های بقای مذکور، در چارچوب مرجع لخت K، به‌این ترتیب‌اند:

$$\begin{cases} \gamma_1 m v_1 = \gamma M v \\ \gamma_1 mc^2 + mc^2 = \gamma M c^2 \end{cases} \qquad (3)$$

که درآن $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}$

ازمعادلهٔ دوم (۲) به‌دست می‌آید: $M = 2\gamma m$ که اگر دررابطه‌های (۳) قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \gamma_1 v_1 = 2\gamma^2 v \\ \gamma_1 + 1 = 2\gamma^2 \end{cases} \qquad (4)$$

هر یك از معادله‌های (۴)، بدون ارتباط با دیگری، یك مقدار برای v_1 به‌دست می‌دهند: $v_1 = \dfrac{2v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$ که در تناظر کامل با قانون نسبیتی تبدیل سرعت است.

۸.۴. ضمن بررسی دینامیك کلاسیك، یادآوری می‌شود که انرژی

درونی E_0 برای جرم ثابت m ذاتی است و به عنوان یك کمیت اختصاصی باید ناوردا باشد، یعنی $E_0 = \mathrm{inv}$ ، با توجه به‌بعدیت E_0، ناوردایی جرم و سرعت مبنا، طبیعی است. فرض کنیم:

$$E_0 = mc^2 \qquad (1)$$

در این صورت می‌تــوان انرژی ذره را، مجموع انرژی درونی و انرژی جنبشی دانست، یعنی

$$E = mc^2 + E_k \qquad (2)$$

با فرض این‌که اندازهٔ حرکت نسبیتی ذره‌ای‌که با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند، $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ باشد $\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$، دوبــاره محاسبهٔ مربوط به آزمایش‌ذهنی برخورد ناکشسان دو ذره را انجام می‌دهیم (۷۰۴ را ببینید).

قانون بقای انرژی، در چــارچــوب مرجع لخت K'، برای سیستم ذره‌ها به‌این نتیجه می‌رسد (شکل ۶۶-a را ببینید):

$$2mc^2 + 2E_k = Mc^2 \qquad (3)$$

قانون بقای انــدازهٔ حرکت در چارچوب مرجع لخت K، این طور نوشته می‌شود (شکل ۶۶-b را ببینید):

$$\gamma_1 m v_1 = \gamma M v \qquad (4)$$

که در آن $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$ و v_1 سرعت ذرهٔ سمت چپ درچارچوب‌مرجع لخت K است.

بنابر سینماتیك نسبیتی: $v_1 = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ و $\gamma_1 = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

اگر مقدارهای v_1 و γ_1 را در (۴) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \qquad (5)$$

و این، رابطهٔ انرژی جنبشی ذرهٔ به‌جرم m، که با سرعت v حرکت می‌کند، در سینماتیك نسبیتی است.

از رابطه‌های (۲) و (۵) می‌توان رابطهٔ انرژی کل ذره را (که قبلاً هم، در ۷.۴، با آن آشنا شدیم) به‌دست‌آورد، یعنی

$$E = \gamma mc^2 \qquad (6)$$

۹.۴. با واردکردن نماد $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$، رابطهٔ انرژی جنبشی نسبیتی (۵) را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})(1+\sqrt{1-\beta^2})}{1+\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}(1+\sqrt{1-\beta^2})}$$

از آن‌جا، به‌ازای $v \ll c$ ($\beta \approx 0$) به‌دست می‌آید: $E_k = \frac{mv^2}{2}$، یعنی بیان کلاسیك انرژی جنبشی که، درعمل، برای همهٔ سرعت‌هایی که خیلی کوچکتر از سرعت مبنا باشند، درست است.

۱۰.۴. چون $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ و $E_{\text{کلاسیك}} = \frac{1}{2}mc^2$، بنابراین، میزان اشتباه در محاسبهٔ مقدار انرژی لازم برای شتاب دادن به‌ذره چنین است:

$$z = \frac{E_k - E_{\text{کلاسیك}}}{E_k} = 1 - \frac{1}{2}\beta^2(\gamma-1)^{-1}$$

و به‌ازای $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$ به‌دست می‌آید: $z = \frac{5}{8}$ یا $z = \%63$.

۱۱.۴. اگر بنابر شرط مسأله فرض کنیم:

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=mc^2$$

به‌دست می‌آید: $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0/868\,c$.

۱۲.۴. اگر از رابطه‌های $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ و $E_k=(\gamma-1)mc^2$ آغاز کنیم، که در آن $\gamma=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$، به‌دست می‌آید:

$$E_k=\frac{p^2}{(1+\gamma)m} \qquad (1)$$

از (۱) به‌ازای $v\ll c$ $(\gamma\approx 1)$، رابطهٔ کلاسیک $E_k=\frac{p^2}{2m}$ به دست می‌آید.

۱۳.۴. بعد از تبدیل‌های جبری ساده‌ای، از

$$p=\gamma mv=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

به‌دست می‌آید:

$$v=\frac{p}{\sqrt{m^2+\frac{p^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

که بعد از گذر حدی به‌سمت دینامیک کلاسیک، خواهیم داشت:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{p}{\sqrt{m^2+\frac{p^2}{c^2}}}=\frac{p}{m}\Rightarrow v=\frac{p}{m}$$

۱۴.۴. درستی رابطهٔ بسیار مهم برای فیزیک نسبیتی، یعنی رابطهٔ

$$\frac{E^2}{c^2}=p^2+m^2c^2 \qquad (1)$$

که در آن، بستگی بین مجذور اندازهٔ حرکت و انرژی کل داده شده است، با قرار دادن مقدارهای $E=\gamma mc^{2}$ و $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ در (۱) به‌دست می‌آید (آن را به‌یک اتحاد تبدیل می‌کند):

۰۱۵۰۴ از رابطه‌های $E=\gamma mc^{2}$ و $p=\gamma mv$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{E}{c}=\frac{pc}{v} \qquad (۱)$$

اگر در (۱) فرض کنیم $v=c$، خواهیم داشت:

$$\frac{E}{c}=p \qquad (۲)$$

چون رابطهٔ (۲) را می‌توان از رابطهٔ (۱) در مسألهٔ ۱۴۰۴ به ازای $m=0$ به‌دست آورد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جرم ذره‌ای که با سرعت $v=c$ حرکت می‌کند، صفر است و اندازهٔ حرکت و انرژی آن با رابطهٔ (۲) به‌هم مربوط می‌شوند.

ممکن است نتیجه‌گیری رابطهٔ (۲)، برای ذره‌ای که در آن $m=0$ است، مورد انتقاد قرار گیرد، زیرا در پیدا کردن آن، دقت لازم رعایت نشده است: در عبارت‌های $E=\gamma mc^{2}$ و $p=\gamma mv$، فرض بر صفر نبودن m است و درحالت $m=0$، آشکارا به‌حالت ابهام از نوع $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شوند.

ذره‌ای (کوانتوم میدان الکترومغناطیسی) را که با سرعت حدی حرکت کند، فوتون می‌نامند. چون $c=\text{inv}$ ، بنابراین نمی‌توان چارچوب مرجع لخت را به‌فوتون مربوط کرد (زیرا در این چارچوب مرجع، سرعت $c=0$، ناوردایی c را نقض می‌کند). یعنی فوتون ساکن وجود ندارد و این نکته هم‌ارز این حکم است که بگوییم: جرم فوتون صفر است ($m=0$).

چون فوتون یك جسم مادی متحرك است، بنابراین باید دارای انرژی E و اندازهٔ حرکت $\vec{p}$ باشد. نسبت $\frac{E}{p}$، اندازهٔ سرعت را به‌دست می‌دهد. ولی سرعت‌فوتون، طبق‌تعریف، تنها سرعت حدی است: $c=\text{inv}$. بنابراین

طبیعی است فرض کنیم:

$$\frac{E}{p}=c \qquad (۳)$$

برای ذره‌هایی با $m\neq ۰$، نسبت انــرژی بــه‌اندازهٔ حرکت، عبارت است از $\frac{E}{p}=\frac{c^{۲}}{v}$ (v، سرعت ذره است). بنابراین برابری اکید زیر، همیشه برقرار است:

$$\left(\frac{E}{p}\right)_{m=۰}<\left(\frac{E}{p}\right)_{m\neq ۰} \qquad (۴)$$

که بنابرآن، نمی‌توان ذره‌ای با شرط $m\neq ۰$ پیدا کرد که انرژی و اندازهٔ حرکت‌آن، برابر انرژی و اندازهٔ حرکت فوتون باشد.

۴.۱۶. افزایش جرم آب چنین است:

$$\Delta m=\frac{\Delta E_{۰}}{c^{۲}}=\frac{mc_{p}\Delta t}{c^{۲}}=$$

$$=\frac{(\text{کیلوگرم})۱\times ۴/۲\times ۱۰^{۳}(\text{ژول بر کیلوگرم بر کلون})\times ۱۰^{۲}(\text{کیلوگرم})}{۹\times ۱۰^{۱۶}\ (\text{مترمربع بر ثانیه بر ثانیه})}=$$

$$=۴/۷\times ۱۰^{-۱۲}\ (\text{کیلوگرم})$$

۴.۱۷. افزایش جرم میله، برابر است با

$$\Delta m=\frac{\Delta E_{۰}}{c^{۲}}=\frac{k\Delta x^{۲}}{۲c^{۲}}=$$

$$=\frac{۱۰^{۵}\ (\text{نیوتون برمتر})\times ۱۰^{-۴}(\text{مترمربع})}{۲\times ۹\times ۱۰^{۱۶}(\text{مترمربع بر ثانیه بر ثانیه})}=۵\times ۱۰^{-۱۷}(\text{کیلوگرم})$$

۴.۱۸. انرژی جسمی به‌جرم ۱ کیلوگرم، بنا بر قانون $E_{۰}=mc^{۲}$، برابر است با

$$E_{۰}=۹\times ۱۰^{۱۶}\ (\text{ژول})$$

نیروگاه آبی دنپر در هر سال به‌اندازهٔ $E=۳/۰۶$ میلیارد کیلو وات ساعت انرژی تولید می‌کند. بنابراین بعد از $\tau=\frac{E_{۰}}{E}\approx ۸$ (سال) کار، همان‌مقدار

انرژی را تولید می‌کند که در یک کیلوگرم جسم وجود دارد.

۱۹.۴. بنابر فرض مسأله، بر یک مترمربع سطح کره‌ای به شعاع $R=15\times10^{6}$ (کیلومتر)، درهر ثانیه ۱/۴ کیلو ژول انرژی‌فرو می‌ریزد. یعنی مقدار کل انرژی تابشی خورشید، در هر ثانیه برابر است با

$$\Delta E_0 = kS = k\cdot 4\pi R^2 \qquad (1)$$

که درآن، $k=1/4$ (کیلو وات بر مترمربع). میزان کاهش جرم خورشید، چنین می‌شود:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} \qquad (2)$$

زمان مجهول (که خورشید درآن قادر به تابش خود باشد)، برابر است با

$$t = \frac{M}{\Delta m} \qquad (3)$$

که درآن، M جرم اولیهٔ خورشید است.

از (۱) تا (۳) به‌دست می‌آید:

$$t = \frac{Mc^2}{4\pi k R^2} \approx 14000 \text{ (میلیارد سال)}$$

۲۰.۴. انرژی دستگاه «گلوله ـ صفحه» را برای دو لحظهٔ زمانی ـ بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از برخورد ـ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} E_1 = mc^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + Mc^2 \\ E_2 = (m+\Delta m)c^2 + \frac{1}{2}(m+\Delta m)v_2^2 + \left(M = \frac{Q}{c^2}\right)c^2 \end{cases} \qquad (1)$$

که درآن‌ها، m جرم گلوله قبل از برخورد با صفحه، $m+\Delta m$ جرم گلوله بعداز برخورد، v_1 و v_2 سرعت گلوله در لحظهٔ افتادن روی صفحه و درلحظهٔ ورجهیدن، M جرم اولیهٔ صفحه و $M+\frac{Q}{c^2}$ جرم صفحه بعد از برخورد است. چون داریم:

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgh_1 \quad , \quad \frac{1}{2}(m+\Delta m)v_2^2=(m+\Delta m)gh_2$$

$(h_1-h_2=\Delta h)$ و برای دستگاه «گلوله ـ صفحه» قانون بقای انرژی کل برقرار است، یعنی

$$E_1=E_2 \qquad (2)$$

می‌توان از (۱) و (۲)، تغییر موردنظر جرم گلوله را به‌دست آورد:

$$\Delta m=\frac{mg\Delta h-Q}{c^2} \qquad (3)$$

ضمن پیدا کردن رابطهٔ (۳)، فرض کردیم $gh_2 \ll c^2$.

۲۱.۴. طبق قانون بقای انرژی و اندازهٔ حرکت، به‌ترتیب داریم:

$$mc^2=E_1+E_2 \qquad (1)$$

و $\vec{p_1}+\vec{p_2}=0$، یعنی

$$p_1^2=p_2^2 \qquad (2)$$

از (۲)، بنابر رابطهٔ (۱) از مسألهٔ ۱۴.۴، به‌دست می‌آید:

$$E_1^2-E_2^2=m_1^2c^4-m_2^2c^4 \qquad (3)$$

با حل دستگاه شامل معادله‌های (۱) و (۳)، نتیجه می‌شود:

$$E_1=\left(\frac{m^2+m_1^2-m_2^2}{2m}\right)c^2 \quad , \quad E_2=\left(\frac{m^2-m_1^2+m_2^2}{2m}\right)c^2 \qquad (4)$$

از آنجا که $E_{1 0}<E_1<mc^2$، $E_{2 0}<E_2<mc^2$، $m_1=\frac{E_{1 0}}{c^2}$ و $m_2=\frac{E_{2 0}}{c^2}$، بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود:

$$m_1+m_2<m \qquad (5)$$

۲۲.۴. مجموعه‌ای از ذره‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم حرکت آن را در حالت کلی شرح دهیم، با مسألهٔ بغرنجی سروکار پیدا می‌کنیم، زیرا باید هم برهم‌کنش ذره‌ها و هم شرایط بیرونی را به حساب آوریم. اگر حرکت مجموعه را به‌عنوان یك مجموعهٔ واحد در نظر بگیریم، به‌طور مشروط می‌توانیم آن را همچون یك نقطهٔ مادی مورد بررسی قرار دهیم. در این صورت از محتوی درونی مجموعه و همهٔ ویژگی‌ها و عامل‌های

دیگر ـ جز جرم M، انــرژی E و اندازهٔ حرکت $\vec{p}$ ـ جــدا می‌شویم. با وجود این، پرسشی پیش می‌آید: M، E و $\vec{p}$ ، متعلق به‌مجموعهٔ ذره‌ها، به‌چه ترتیب معین می‌شوند؟

درکلی‌ترین حالتی کــه با مجموعه‌ای از ذره‌های برهم‌کنش‌دار (در فاصله) سروکار داشته باشیم، انرژی کل آن، به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i+W \qquad (1)$$

که در آن $\varepsilon_i=\gamma_i m_i c^2$ $\left(\gamma_i=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_i^2}{c^2}}}\right)$، انرژی هر ذره و W، جمع انرژی برهم‌کنش همهٔ ذره‌هاست.

در دینامیك کلاسیك، W انرژی پتانسیل است که به‌صورت یك ارزشی از روی ترکیب مجموعــه معین می‌شود (بــه ازای نوع مفروض برهم‌کنش ذره‌ها). درآن‌جا مفهوم W بر پایهٔ کنش فوری و لحظه‌ای از دور، استوار است و بنابراین، به‌طورکامل به‌نظریهٔ نسبیت کلاسیك مربوط می‌شود.

در دینامیك نسبیتی (که بر شالودهٔ نظریهٔ نسبیت خاص استوار است)، به‌دلیل نفی کنش آنی ازدور، نمی‌توان W را همچون انرژی پتانسیل دانست. در این‌جا، تعیین W در حالت کلی، بــه‌دشواری‌های زیــادی برمی‌خورد و نمی‌توان آن را به‌صورتی یك ارزشی از روی مقدارانرژی کل به‌مفهوم (۱) و، بنابراین، از روی اندازهٔ حرکت $\vec{p}$ به‌دست آورد. به‌همین مناسبت، توجه خود را به‌ساده‌ترین حالت، یعنی وقتی کــه ذره‌های مجموعه، کنش از دور ندارند، محدود می‌کنیم. در این صورت $W=0$ و

$$E=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \ , \ \vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p_i} \qquad (2)$$

که درآن، ε_i و $\vec{p_i}$ به‌ترتیب انرژی و اندازهٔ حرکت ذرهٔ iاُم است.

چارچوب مرجع لخت مرکز جرم (چارچوب مرکزی) را، به عنوان چارچوب مرجعی که مجموعهٔ ذره‌ها (به‌عنوان یك‌واحد) درآن ساکن است،

معین می‌کنیم، یعنی

$$\overrightarrow{p'}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p'_i}=0 \qquad (3)$$

که در آن، علامت «پریم» به‌معنای تعلق به‌چارچوب مرکزی است.

در چارچوب مرکزی داریم:

$$E'=E_0=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon'_i \qquad (4)$$

که در آن، E_0 انرژی ساکن همهٔ ذره‌هاست.

بنابراین، جرم M مجموعه، این‌طور معین می‌شود:

$$M=\frac{E_0}{lc^2} \qquad (5)$$

به‌این ترتیب، وقتی با مجموعه‌ای سروکار داشته باشیم که ذره‌های آن، برهم‌کنش نداشته‌باشند، می‌توان آن را همچون یك‌ذره با انرژی $E=\sum_i \varepsilon_i$، اندازهٔ حرکت $\overrightarrow{p}=\sum_i \overrightarrow{p_i}$ و جرم $M=E_0 lc^2$ در نظر گرفت. در این صورت، برای تمامی‌مجموعهٔ ذره‌ها، رابطهٔ (۱) ازمسألهٔ **۱۴.۴** برقراراست:

$$E^2-p^2c^2=M^2c^4=\mathrm{inv} \qquad (6)$$

۲۳.۴. بنابر فرض مسأله، با سیستمی سروکار داریم که شامل ذرهٔ بدون برهم‌کنش است. بنابراین، می‌توان از رابطه‌های مربوط به انرژی، اندازهٔ حرکت و جرم در **۲۲.۴**، استفاده کرد. چون سیستم ذره‌ها جدا شده است، انرژی و اندازهٔ حرکت‌آن (در زمان) ثابت است.

به‌این ترتیب، جرم مجهول m از ذرهٔ مرکب، بنا بر (۱) از **۱۴.۴**، به‌صورت

$$m=\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2-p^2c^2}$$

تعیین می‌شود که در آن انرژی و اندازهٔ حرکت ذرهٔ مرکب، برابر است با مجموع انرژی و اندازهٔ حرکت ذره‌هایی که به‌هم برخورد کرده‌اند:

$$E=\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_2c^2 \quad , \quad p=\frac{m_1v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

با انجام محاسبه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$m=\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\gamma} \qquad (1)$$

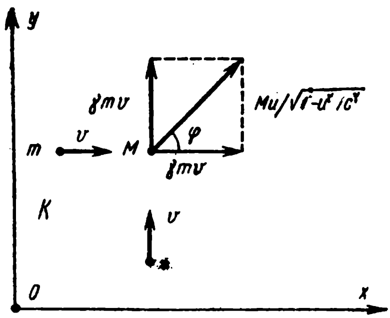
که در آن $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

سرعت ذرهٔ مرکب (۱۵.۴ را ببینید) را از رابطهٔ $u=\dfrac{pc^2}{E}$ پیدا می‌کنیم. بنابراین

$$u=\frac{m_1v}{m_1+m_2\gamma^{-1}} \qquad (2)$$

۲۴.۴. الف) برخوردناکشسان ذره‌ها را بررسی‌می‌کنیم (شکل ۶۷). جرم ذرهٔ مرکب (۲۲.۴ را ببینید) عبارت است از

$$M=\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2-p^2c^2}$$



شکل ۶۷

که در آن

$$p^2=\frac{2m^2v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\ ,\quad E=\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

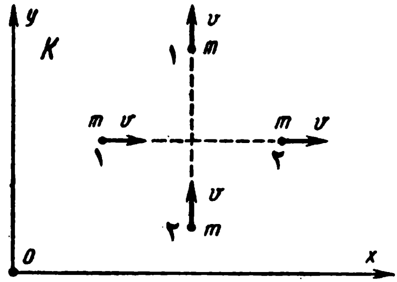
بنابراین

$$M=۲m\gamma\sqrt{۱-\frac{v^۲}{۲c^۲}} \qquad (۱)$$

که در آن $\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$.

سرعت برابر است با

$$u=\frac{pc^۲}{E}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}v \qquad (۲)$$



شکل ۶۸

جهت این سرعت، با زاویهٔ φ از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

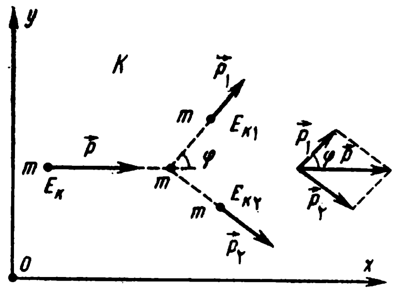
$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \varphi=۴۵^\circ$$

ب) از تقارن پدیده، بلافاصله نتیجه می‌شود که حرکت ذره بعد از برخورد، تحت زاویهٔ $\varphi=\frac{\pi}{۲}$، با سرعتی با قدر مطلق u و جرم $m_۱$ انجام می‌گیرد. از این جا، طبق قانون بقای انرژی و اندازهٔ حرکت داریم:

$$۲\gamma mc^۲=۲\gamma_۱ m_۱ c^۲ \quad , \quad \gamma mv=\gamma_۱ m_۱ u$$

که درآن‌ها $\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}$ و $\gamma_۱=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{u^۲}{c^۲}}}$. از همهٔ این‌ها نتیجه می‌شود: $u=v$ و $m_۱=m$، یعنی بعد از برخورد، در سیستم ذره‌ها، تغییری حاصل نمی‌شود.

۲۵.۴. بنابرقانون بقای انرژی واندازهٔ حرکت (شکل ۶۹را ببینید):



شکل ۶۹

$$E_k + 2mc^2 = E_{k_1} + E_{k_2} + 2mc^2 \Rightarrow E_k = E_{k_1} + E_{k_2} \quad (1)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

از اینجا نتیجه می‌شود.

$$p_2^2 = p^2 - 2pp_1 \cos\varphi + p_1^2 \quad (2)$$

اگر از رابطه‌ای که بین انرژی و اندازهٔ حرکت ذره وجود دارد، [(۱) در ۱۴.۴] استفاده کنیم، به‌دست می آید:

$$p^2 = \frac{(E_k + mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2 \quad , \quad p_1^2 = \frac{(E_{k_1} + mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2$$

$$p_2^2 = \frac{(E_{k_2} + mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2 \quad (3)$$

اگر (۳) را در (۲) به کار بریم، سپس E_k را در (۱) در نظر بگیریم، به‌دست می آید:

$$E_{k_1} = \frac{E_k \cos^2\varphi}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{E_k}{mc^2}\right)\sin^2\varphi} \quad (4)$$

۲۶.۴. قانون اصلی دینامیك نسبیتی درحالت کلی به‌این صورت است:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \quad (1)$$

که در آن

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

توجه می‌کنیم که کار نیرو برابر است با

$$A = \vec{F} \cdot \vec{v}\, \Delta t = \Delta E = \Delta(\gamma m c^2) \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۲) به‌ازای $\vec{F} \perp \vec{v}$ داریم: $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ و در نتیجه $\Delta\gamma = 0$، یعنی $v = \text{const}$. در این صورت

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\gamma \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\gamma \vec{a}$$

به‌این ترتیب، به‌ازای $\vec{F} \perp \vec{v}$، قانون اصلی دینامیك، به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F} \qquad (۳)$$

در حالت $\vec{v} \parallel \vec{F}$، از (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\vec{v} \cdot \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, \Delta t = \Delta(\gamma m c^2)$$

یعنی $\vec{v} \cdot \Delta(\gamma m \vec{v}) = \Delta(\gamma m c^2)$ که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\vec{v} \cdot \Delta\vec{v} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} c^2 \Delta\gamma \qquad (۴)$$

در این صورت از (۱) داریم:

$$m\gamma \Delta \vec{v} = \vec{v}\, m \Delta\gamma = \vec{F} \Delta t \qquad (۵)$$

با قراردادن $\Delta\gamma$ از (۴) در (۵) حاصل می‌شود:

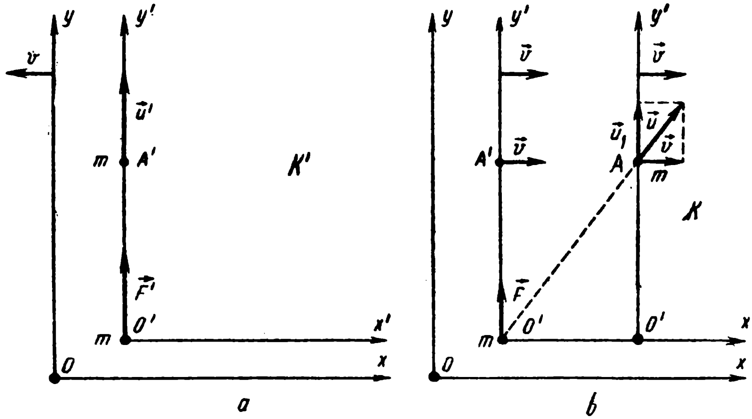
$$\frac{m\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \vec{F} \qquad (۶)$$

۲۷۰۴. فرض کنید ذره‌ای به‌جرم m، در چارچوب مرجع لخت K'، تحت تأثیر نیروی $\overrightarrow{F'}$ حرکت کند (شکل ۷۰–a و b را ببینید)؛ در ضمن سرعت‌آن بعداز زمان $\Delta t'$، از $u'=0$ به u' ($\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{v}$) تغییر می‌کند. در این‌صورت، بر اساس قانون دینامیك نسبیتی، $\Delta p'_y = F'\Delta t'$، و با توجه به

$$\Delta p'_y = \gamma'_1 m u' \left(\gamma'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

به‌دست می‌آید:

$$\gamma'_1 m u' = F'\Delta t' \qquad (1)$$



شکل ۷۰

نسبت بـه‌چـارچـوب مرجع لخت K، ذرهٔ مفروض در امتداد OA' حرکت می‌کندکـه سرعت آن در ابتدا $\overrightarrow{v}$ و بعد از زمان Δt برابر $\overrightarrow{u}$ است. تصویرهای تغییر اندازهٔ حرکت ذره را، بعد از زمان Δt، روی محورهای x و y پیدا می‌کنیم:

$$\Delta p_x = 0 \quad , \quad \Delta p_y = \gamma_1 m u_1 = F\Delta t, \qquad (2)$$

که درآن $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ و $u^2 = u_1^2 + v^2$.

با در نظر گرفتن این که

$$u_1 = u'\sqrt{1-\beta^2} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

[رابطهٔ (۳) در ۱۴۰۳، ب) را ببینید]، به‌دست می‌آید:

$$u^2 = u'^2(1-\beta^2)+v^2 \ , \quad 1-\frac{u^2}{c^2} = \left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)(1-\beta^2)$$

یا

$$\gamma_1 = \gamma'_1 \gamma \qquad (۴)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

اگر (۳) و (۴) را در (۲) قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\gamma'_1 m u' = F\Delta t \qquad (۵)$$

چون $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (۲۲۰۲ را ببینید)، از (۵) نتیجه می‌شود:

$$\gamma'_1 m u' = \frac{F\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

اگر رابطهٔ اخیر را با رابطهٔ(۱) مقایسه کنیم، سرانجام به‌دست‌می‌آید:

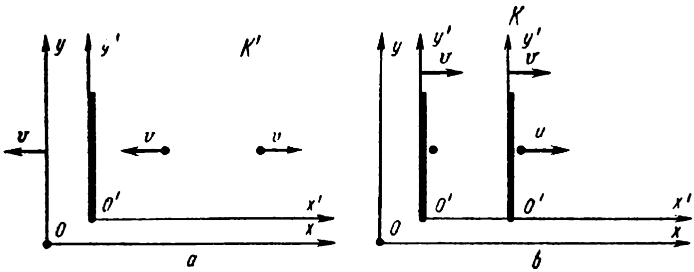
$$F = F'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

یا

$$F_\perp = F'_\perp\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (۶)$$

که همان قانون تبدیل مؤلفهٔ عرضی $\vec{F}$ است.

اکنون به بررسی آزمایشی ذهنی می‌پردازیم که در آن با برخورد کشسان گلوله‌ای (به‌جرم m) با دیوار عقبی آزمایشگاه چارچوب مرجع لخت K' سروکارداریم (شکل ۷۱–a). برای ساده‌تر کردن محاسبه فرض می‌کنیم: $u' = v$ (در حالت $u' \neq v$ نیز، با انجام محاسبه‌های پیچیده‌ای به همین



شکل ۷۱

نتیجه می‌رسیم). در این صورت، در چارچوب مرجع لخت K' داریم:

$$p'_1 = -\gamma mv, \quad p'_2 = \gamma mv, \quad \Delta p' = p'_2 - p'_1 = 2\gamma mv$$

که در آن‌ها $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. چون $\Delta p' = F'\Delta t'$، پس

$$2\gamma mv = F'\Delta t' \qquad (7)$$

درچارچوب مرجع لخت K (شکل ۷۱-b) درلحظهٔ قبل از برخورد، سرعت گلوله برابر صفر است، ولی بعد از برخورد بنابرقانون نسبیتی تبدیل سرعت، برابر $u = \dfrac{2v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$ می‌شود. بنابراین

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \gamma(u)mu, \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \gamma(u)mu$$

که در آن $\gamma(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$.

با توجه به‌این‌که $\gamma(u) = \dfrac{1+\dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$، به‌دست می‌آید:

$$\Delta p = \frac{2mv}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = F\Delta t \qquad (8)$$

چون $\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (این رابطه، در واقع در این جا برقرار است)، از (۷) و (۸) به‌دست می‌آید:

$$F=F' \Rightarrow F_{\|}=F'_{\|} \qquad (۹)$$

از اندیشهٔ رابطهٔ (۹) می‌توان برای پیدا کردن رابطهٔ (۶) استفاده کرد. در این حالت باید گلوله درچارچوب مرجع لخت K' عمود بر بردار $\vec{v}$ حرکت کند.

رابطه‌های (۶) و (۹)، تنها در حالتی برقرارند که ذره در یکی از چارچوب‌های مرجع لخت (K' یا K)، در امتداد سرعت نسبی آن‌ها، ساکن باشد، در غیر این صورت، قانون تبدیل مؤلفه‌های نیرو، پیچیده‌تر می‌شود.

۲۸.۴. چون تغییر انرژی ذره برابر با کار نیرویی است که بر آن وارد می‌آید، یعنی $\Delta E=A$، پس با فرض $A=F\Delta x$ و $F=\frac{\Delta(\gamma mv)}{\Delta t}$ داریم

$$\Delta E=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta(\gamma mv)=mv\Delta(\gamma v)=mc^2\beta\Delta(\gamma\beta) \qquad (۱)$$

که در آن $\beta=\frac{v}{c}$ و $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

از اتحاد $\gamma^2(1-\beta^2)=1$ به‌دست می‌آید: $\beta=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}$ که اگر در (۱) قرار دهیم:

$$\Delta E=\frac{1}{\gamma}mc^2[\sqrt{\gamma^2-1}\,\Delta(\sqrt{\gamma^2-1})] \qquad (۲)$$

اگر $z=\sqrt{\gamma^2-1}$ بگیریم و از رابطه‌های

$$\Delta(z^2)=2z\Delta z,\ \ \Delta(\gamma^2)=2\gamma\Delta\gamma$$

استفاده کنیم، از (۲) به‌دست می‌آید: $\Delta E=mc^2\,.\,\Delta\gamma$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$E=\gamma mc^۲+\text{const} \qquad (۳)$$

بنابراین، به ازای $v=۰$ ، $E=E_۰=mc^۲=\text{inv}$، از (۳) نتیجه می‌شود: $\text{const}=۰$ و در این صورت

$$E=\gamma mc^۲ \qquad (۴)$$

و انرژی جنبشی برابر می‌شود با

$$E_k=E-E_۰=(\gamma-۱)mc^۲ \qquad (۵)$$

۲۹.۴. کار نیروی مقاومت F_C، برابر است با تغییر انرژی کل جسم ΔE، یعنی $-F_C l=\Delta E$. چون

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_۰=-E_k+c^۲\Delta m$$

پس $\Delta m=\dfrac{-F_C l+E_k}{c^۲}$. به‌این ترتیب، جرم مجهول برابر است با

$$M=m+\Delta m=m+\frac{E_k-F_C l}{c^۲} \qquad (۱)$$

۳۰.۴. ازقانون اصلی دینامیك که دراین جا می‌توان‌آن را به‌صورت اسکالر $F=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ یا

$$\frac{\Delta(\gamma mv)}{\Delta t}=F_۰(۱+\alpha t)$$

نوشت (Δt به‌اندازهٔ کافی کوچك است)، به‌دست می‌آید:

$$\Delta(\gamma mv)=\Delta(F_۰t)+F_۰\alpha t\Delta t \qquad (۱)$$

چون $t\Delta t=\Delta\left(\frac{۱}{۲}t^۲\right)$ (۳۰۱ را ببینید)، بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود:

$$\Delta(\gamma mv)=\Delta\left(F_۰t+\frac{۱}{۲}\alpha F_۰t^۲\right)$$

ازآن جا

$$\frac{mv}{\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}}=F_۰\left(۱+\frac{۱}{۲}\alpha t\right)t$$

(این‌جا از شرط $v=۰$، به‌ازای $t=۰$، استفاده کرده‌ایم).

اکنون با فرض

$$f(t)=\frac{۱}{m}F_{\circ}\left(۱+\frac{۱}{۲}\alpha t\right)t \ , \ \varphi(t)=\frac{f(t)}{\sqrt{c^{۲}+f^{۲}(t)}}$$

سرعت ذره را به‌این صورت بیان می‌کنیم:

$$v=\varphi(t)\cdot c \qquad (۲)$$

نتیجهٔ (۲) نشان می‌دهد که برای هر مقدار محدود t داریم: $v<c$ (زیرا $\varphi(t)<۱$) و تنها به‌ازای $t\to\infty$ خواهیم داشت: $v\to c$.

نتیجه‌گیری‌های کوتاه

رابطهٔ اندازهٔ حرکت کلاسیك، $\vec{F}=m\vec{v}$ $(m=\text{inv})$، انرژی جنبشی، $E_k=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$، وقانون اصلی دینامیك، $m\vec{a}=\vec{F}$، با سینماتیك نسبیتی و با قانون نسبیتی تبدیل سرعت، از موضع سرعت مبنای حدی $(c=\text{inv}<\infty)$، سازگار نیستند، یعنی با نظریهٔ نسبیت خاص متناقض‌اند.

عبارت اندازهٔ حرکت نسبیتی $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ $\left(\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}} ، m=\text{inv}\right)$

انرژی جنبشی $E=(\gamma-۱)mc^{۲}$، انرژی کل $E=\gamma mc^{۲}$، انرژی ساکن $E_{\circ}=mc^{۲}$ وقانون اصلی دینامیك $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$، در ارتباط با یکدیگر ومتناظر با نظریهٔ نسبیت خاص‌اند.

ضمن وارد آوردن نیروی $\vec{F}=\text{const}$ برذره، سرعت آن طبق‌قانون

$$v=\frac{a_{\circ}t}{\sqrt{۱+\left(\frac{a_{\circ}t}{c}\right)^{۲}}} \qquad (۱)$$

تغییر می‌کند که در آن، $a_{\circ}=\frac{F}{m}$ در لحظهٔ نخستین وارد آمدن نیروی F

است (در حالت $v \ll c$ رابطهٔ $ma_{\circ} = F$ برقرار است).

از (۱) نتیجه می‌شود که، به‌ازای $t \to \infty$، داریم $v \to c$، یعنی حرکت ذره نمی‌تواند به‌سرعت مبنا برسد.

در دینامیک نسبیتی، مفهوم «حرکت متشابه‌التغییر تند شونده» به معنای کلاسیك آن وجودندارد، زیرا قانون نیوتون به‌صورت $m\vec{a} = \vec{F}$ نادرست است.

به‌ازای $v \ll c$ (حوزهٔ سرعت‌های کوچك)

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 ،\ E = \infty ،\ E_{\circ} = \infty ،\ \vec{p} = m\vec{v} \text{ و } \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} ،$$

یعنی همان نتیجه‌های شناخته شده در دینامیك کلاسیك، درست‌اند، زیرا می‌توان آن‌ها را از رابطه‌های متناظر خود در دینامیك نسبیتی نتیجه گرفت. ولی این نکته به‌معنای آن نیست که درهمهٔ موردها، در حوزهٔ $v \ll c$، دینامیك کلاسیك و مفهوم‌های آن کفایت می‌کند. برعکس، در هر سرعتی (چه با سرعت حدی قابل مقایسه باشد یا نه)، دینامیك نسبیتی، صحیح‌تر از دینامیك کلاسیك، واقعیت را منعکس می‌کند (مثلاً، قانون $E_{\circ} = mc^2$، به‌طور کلی، ارتباطی به‌سرعت حرکت جسم ندارد، زیرا انرژی آن را در حالت سکون معرفی می‌کند).

ذرهٔ با جرم $m = \circ$ هم، دارای انرژی و اندازهٔ حرکت است، در ضمن برای آن داریم: $\frac{E}{c} = p$.

مضمون‌قانون $E_{\circ} = mc^2$، دراین‌رابطه‌ها نهفته‌است: $\Delta E_{\circ} = c^2 \Delta m$، $\Delta m = \frac{\Delta E_{\circ}}{c^2}$، یعنی تغییر انرژی ساکن ذره (جرم) همراه است با تغییر جرم هم‌ارزآن (انرژی ساکن).

در سیستم منتزع شدهٔ ذره‌ها، قانون بقای اندازهٔ حرکت و انرژی برقرار است:

$$\sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i = \text{const} \ ,\ \sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const}$$

ولی قانون بقای جرم برقرار نیست ، زیرا $\sum_i m_i \neq \text{const}$.

برای سیستمی که ذره‌های آن، کنش از دور ندارند:

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 = \text{inv}$$

که درآن E، $\vec{p}$ و M، به‌ترتیب، انرژی، اندازهٔ حرکت وجرم کل سیستم‌اند: $M = \frac{E_0}{c^2}$ (E_0، انرژی ساکن، برابر است با انرژی سیستم در چارچوب مرجع مرکز جرم آن).

قانون تبدیل نیرو: $F_x = \text{inv}$ ، $F_y = F'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

§ ۵. الکترودینامیك

۱.۵. اگر فرض کنیم $q \neq \text{inv}$، یعنی بین بار و سرعت حرکت آن نوعی بستگی در نظر بگیریم، با نتیجه‌های حاصل از تجربه‌ها، در تناقض قرار می‌گیریم. مثلاً با تغییر دمای جسم و یا واکنش‌های شیمیایی، انرژی و، بنابراین، سرعت حرکت الکترون‌ها در اتم، تغییر می‌کند که اگر فرض کنیم: $q \neq \text{inv}$ باید خنثی بودن اتم‌ها نقض شود ، که در واقعیت دیده نمی‌شود. بنابراین، طبیعی است که به‌عنوان یك حقیقت تجربی بپذیریم:

$$q = \text{inv} \qquad (1)$$

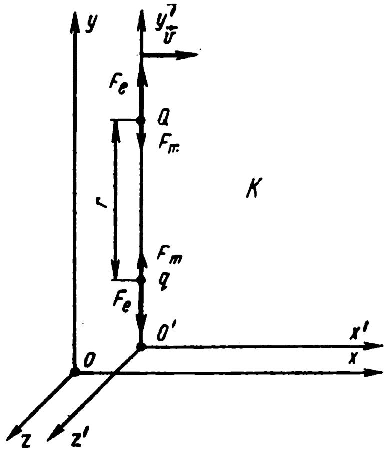
۲.۵. در چارچوب مرجع لخت K'، جایی که بارها ساکن‌اند، برهم‌کنش آن‌ها الکتریکی است (شکل ۱۲ را ببینید):

$$E'_\perp = \frac{kqQ}{r'^2} \qquad (1)$$

که درآن $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$؛ r' به اندازهٔ کافی کوچك گرفته می‌شود تا بتوان از سرعت محدود کنش الکتریکی صرف‌نظر کرد و از قانون کولن در حوزهٔ

نظریهٔ نسبیت خاص سود برد.

در چارچوب مرجع لخت K، هردوبار، با سرعت یکنواخت v حرکت می‌کنند (شکل ۷۲). بنابر رابطهٔ (۶) از مسألهٔ ۲۷۰۴ داریم:



شکل ۷۲

$$F_{\perp}=F'_{\perp}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{kqQ}{r^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (۲)$$

که درآن فرض می‌کنیم: $r=r'$ (زیرا $l_{\perp}=\text{inv}$).

(۲) را در $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ضرب و سپس برآن تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\vec{F}_{\perp}=\vec{F}_e+\vec{F}_m \qquad (۳)$$

که درآن $F_e=\dfrac{kqQ}{r^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، مؤلفهٔ الکتریکی نیروی عرضی، و

$F_m=\dfrac{kqQv^2}{r^2c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، مؤلفهٔ مغناطیسی نیروی عرضی است.

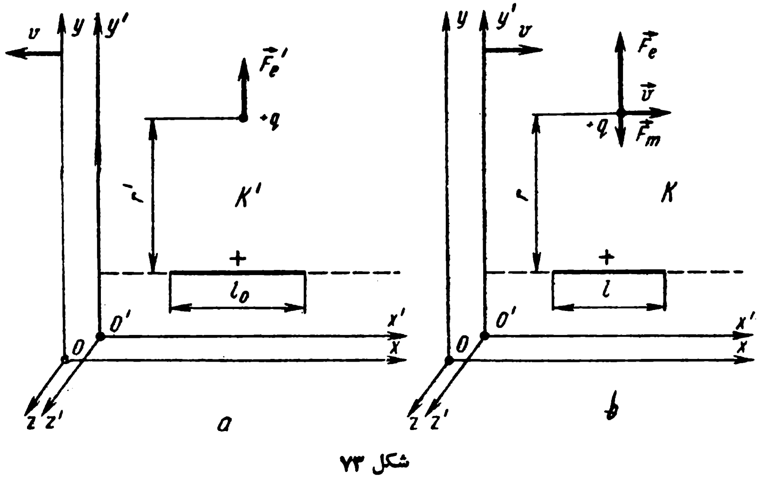
از رابطهٔ $\frac{|F_m|}{|F_e|}=\frac{v^2}{c^2}$ معلوم می‌شود که مؤلفهٔ مغناطیسی، به‌ازای $v \ll c$، خیلی کوچکتر از مؤلفهٔ الکتریکی است. اگر (۳) را با نتیجهٔ مسألهٔ ۳۴۰۱ مقایسه کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که: ظهور نیروی مغناطیسی $\vec{F}_m$، یک اثر خالص نسبیتی است.

۳۰۵. شدت میدان الکتریکی مفتول بارداری که طول آن بی‌نهایت و چگالی خطیش λ_0 است، در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ r'، برابر است با[1]

$$E'_{\perp}=\frac{2k\lambda_0}{r'} \qquad (1)$$

که در آن $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

آن‌وقت، نیروی الکتریکی که بر بار ساکن q در چارچوب مرجع لخت K' وارد می‌آید (شکل ۷۳–a)، عبارت است از



شکل ۷۳

۱. رابطهٔ (۱) در دورهٔ درسی دبیرستانی وجود ندارد، ولی می‌توان آن‌را به‌سادگی و به‌کمک اصول مشهور مربوط به‌جمع آثار میدان الکتریکی و مقدمات آنالیز ریاضی به‌دست آورد.

$$F'_\perp = qE'_\perp = \frac{2k\lambda_0}{r'}q \qquad (2)$$

اگر بخشی از مفتول به‌طول l_0 را در چارچوب مرجع لخت K' در نظر بگیریم، بار آن در ایـن چارچوب مرجع برابر $\lambda_0 l_0$ و در چارچوب مرجع لخت K برابر $l\lambda$ می‌شود و چون بار ناوردا است (۱۰۵ را ببینید)، بنابراین $l\lambda = \lambda_0 l_0$. با در نظر گرفتن $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$، به‌دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

بر بار q کــه در چارچوب مــرجع لخت K و با سرعت v حرکت می‌کند، نیروی

$$F_\perp = F'_\perp\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2k\lambda_0}{r'}q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

وارد می‌آید که با در نظر گرفتن (۳) و $r = \text{inv}$:

$$F_\perp = \frac{2k\lambda q}{r} - \frac{2k\lambda q v^2}{rc^2} \qquad (4)$$

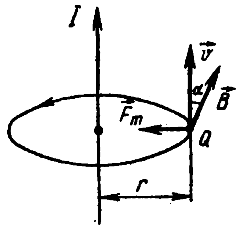
که در آن $F_e = \frac{2k\lambda q}{r}$ و $F_m = -\frac{2k\lambda q v^2}{rc^2}$ به‌ترتیب مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی نیروی عرضی $\vec{F}_\perp$ هستند که بر بار q در چارچوب مرجع لخت K وارد می‌آیند. (شکل ۷۳–b).

۴۰۵. مفتول بارداری که با سرعت v حرکت می‌کند، هم‌ارز است با جریان I در رسانای ساکن. چون داریم: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$، که درآن $\Delta q = \lambda \Delta l$؛ Δl عنصری از مفتول، λ چگالی خطی بار و $\Delta t = \frac{\Delta l}{v}$ زمان‌حرکت بار Δq؛ بنابراین

$$I = \lambda v \qquad (1)$$

بنابر رابطهٔ (۴) ازمسألهٔ ۳.۵ (شکل ۷۴)، نیرویی را که از جانب رسانای حامل جریان بر بار Q وارد می‌آید، پیدا می‌کنیم (در ارتباط با حرکت بار Q با سرعت v):

$$F_m=\frac{2kQv}{rc^2}I \qquad (2)$$



شکل ۷۴

اگر به‌حساب آوریم: $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ و در ضمن $\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ را μ_0 بنامیم، به‌دست می‌آید:

$$F_m=Qv\mu_0\frac{1}{2\pi r} \qquad (3)$$

به‌این ترتیب، جریان الکتریکی با نیروی F_m[(۳)] بر بار متحرك Q اثر می‌کند. این تأثیر بــه میدان مغناطیسی منتقل می‌شود و جریانی را پدید می‌آورد (کــه باز هم با بار $\Delta q=I\Delta t$ حرکت می‌کند). از ایــن بحث می‌توان نتیجه گرفت که: «ایجاد» میدان مغناطیسی به وسیلهٔ جریان یا بار متحرك، یك پدیدهٔ نسبیتی است.

۵.۵ کمیت

$$B=\frac{F_m}{Qv_\perp} \qquad (1)$$

را وارد می‌کنیم و آن را به‌عنوان قدرمطلق بردار متناظر $\overrightarrow{B}$ می گیریم که بر بارمثبت واحدی که با سرعت واحد عمود بر بردار $\overrightarrow{B}$ حرکت می‌کند، وارد می‌آید. آن‌گاه رابطهٔ (۳) از مسألهٔ ۴.۵ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$F_m = QvB \sin\alpha \qquad (۲)$$

که در آن $v \sin\alpha = r_\perp$ و α زاویهٔ بین بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{v}$ (شکل ۷۴ را ببینید).

رابطهٔ (۲) کـه نیروی لـورنتس را معرفی می‌کند، عبارت است از نیرویی که میدان مغناطیسی بر بار متحرك وارد می‌آورد.

بردار $\vec{B}$ را بردار القای مغناطیسی میدان مغناطیسی گویند. از رابطهٔ (۲) و رابطهٔ (۳) در مسألهٔ ۴.۵، نتیجه می‌شود که قدرمطلق بردار $\vec{B}$ میدان مغناطیسی که به‌وسیلهٔ جریان I به وجود آمده و در رسانای به‌طول بی‌نهایت ــ که به‌فاصلهٔ x از آن قرار دارد ــ جریان می‌یابد، برابر است با

$$B = \mu_\circ \frac{۱}{۲\pi r} \qquad (۳)$$

۶.۵. فرض می کنیم در چارچوب مرجع لخت K'، میدان الکتریکی یکنواختی با شدت E' وجود داشته باشد (مثلاً، چارچوب مرجع لخت K' به‌یك خازن تخت وابسته است)، در ضمن، چارچوب مرجع لخت K'، نسبت به‌چارچوب‌مرجع‌لخت K، چنان‌حرکت‌می‌کند که: $\vec{E'} \parallel \vec{v}$. چون $E' = \frac{F'}{q'}$ (که q'، بار مشابهی است) و در چـارچـوب مـرجع لخت K: $E = \frac{F}{q}$ و $q' = q$ (زیـرا $q = \text{inv}$)، $F' = F$ (چـون $\vec{F_\parallel} = \text{inv}$) ؛ بنابـرایـن به‌دست می آید:

$$E' = E \text{ یا } \vec{E_\parallel} = \text{inv} \qquad (۱)$$

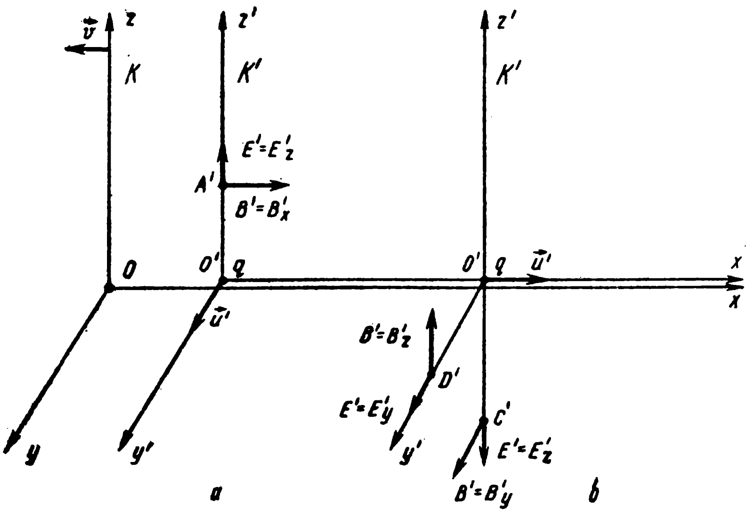
۷.۵. حالتی را درنظرمی گیریم که $\vec{v} \perp E'$. درضمن $F'_e = q'E'$، $F_e = QE$. چون $q = q'$ و $F_e = \frac{F'_e}{\sqrt{۱ - \frac{v^۲}{c^۲}}}$ (۲.۵ را ببینید)، بنابراین

$$E_\perp = \frac{E'_\perp}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

۸.۵. ۱) فرض کنید بار q، در چارچوب مرجع لخت K' (شکل ۷۵-a) با سرعت $\vec{u}$ درامتداد محور y' حرکت کند. درنقطهٔ $A'(0,0,z')$، میدان مغناطیسی با القای $\vec{B'}$ و میدان الکتریکی با شدت $\vec{E'}$ وجود دارد. مؤلفه‌های این بردارها، نسبت بـه محورهای x'، y' و z'، به ترتیب برابر است با

$$B'_x = \frac{\mu_0 q u'_y}{4\pi z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \ , \ B'_y = 0 \ , \ B'_z = 0 \qquad (1)$$

$$E'_x = 0 \ , \ E'_y = 0 \ , \ E'_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$$



شکل ۷۵

با توجه بـه نتیجه‌های مسألهٔ ۲.۵ و رابطهٔ (۱) از مسألهٔ ۵.۵، B'_x و E'_z با

توجه به رابطهٔ (۱) از مسألهٔ ۷۰۵، به‌دست آمده است.

در چارچوب مرجع لخت K، بنابرقانون نسبیتی تبدیل سرعت‌داریم:

$$u_x = v \ , \ u_y = u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ , \ u_z = 0$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$$

بنابراین

$$B_x = \frac{\mu_0 q u_y}{4\pi z^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\mu_0 q u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{4\pi z'^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = B'_{x0} \quad (2)$$

۲) حالتی را در نظر می‌گیریم که بار q در چارچوب مرجع لخت K' باسرعت u' درامتداد محور x' حرکت می‌کند ($u'_y = u'_z = 0$،$u'_x = u'$).

در این صورت، در نقطهٔ $D'(0, y', 0)$ داریم:

$$\begin{cases} B'_y = B'_x = 0 \ , \ B'_z = \dfrac{\mu_0 q u'}{4\pi y'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \\ \\ E'_x = E'_z = 0 \ , \ E'_y = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 y'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3)$$

و در نقطهٔ $C'(0, 0, -z')$:

$$\begin{cases} B'_x = B'_z = 0, B'_y = \dfrac{\mu_0 q u'}{4\pi z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \\ \\ E'_x = E'_y = 0 \ , \ E'_z = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (4)$$

ازآن‌جا که در چارچوب مرجع لخت K داریم:

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}\;,\;\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{u'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$$

برای نقطهٔ C' به‌دست می‌آید:

$$B_y=\frac{\mu_0 qu}{4\pi z^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\mu_0 qu'}{4\pi z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+$$

$$+\frac{\mu_0 qv}{4\pi z'^2\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ازآن‌جا با توجه به (۴) $\left(\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\right)$ نتیجه می‌شود:

$$B_y=\frac{B'_y-\frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (۵)$$

به‌همین ترتیب، ضمن محاسبه‌ای در مورد نقطهٔ D' حاصل می‌شود:

$$B_z=\frac{B'_z+\frac{v}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (۶)$$

به‌این ترتیب، قانون تبدیل مولفه‌های بردار القای مغناطیسی، برای چارچوب‌های مرجع لخت K' و K، عبارت است از

$$B_x=B'_x\;,\;B_y=\frac{B'_y-\frac{v^2}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;,\;B_z=\frac{B'_z+\frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (۷)$$

نتیجه‌گیری‌های (۷)، در حالت خاص، به این معناست که: اگر در

چارچوب مرجع لخت K'، با میــدان الکتریکی خاص سروکار داشته باشیم ($\overrightarrow{E'} \neq 0$ ، $\overrightarrow{B'} = 0$)،آن‌گاه درچارچوب مرجع لخت K، جز این میدان، میدان مغناطیسی هم وجــود خواهد داشت ($\overrightarrow{E} \neq 0$ ، $\overrightarrow{B} \neq 0$) (۱۰۵ را ببینید).

۹۰۵. با استفاده از رابطهٔ (۳) در مسألــهٔ ۸۰۵ در چارچوب مرجع لخت K، می نویسیم:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y^2 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{q\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 y'^2 \sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، از رابطهٔ (۴) مسألهٔ ۸۰۵ به‌دست می‌آید:

$$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

رابطهٔ (۱) از ۶۰۵ را هم در نظر می‌گیریم:

$$E_x = E'_x \qquad (3)$$

به این ترتیب، قانون تبدیل مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{E}$ برای چارچوب‌های مرجع لخت K' و K، به‌دست می‌آید:

$$E_x = E'_x \ , \ E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \ E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

نتیجهٔ (۴)، در حالت خاص، بــه‌این معناست: اگر در چارچوب مرجع لخت، میدان خالص مغناطیسی وجود داشته باشد ($\overrightarrow{E'} = 0$ ، $\overrightarrow{B'} \neq 0$)،

در چارچوب مرجع لخت K، به جز آن، میدان الکتریکی هم وجود خواهد داشت($\vec{E}\neq 0$ ، $\vec{B}\neq 0$).

۱۰۰۵. اثبات ناوردایی $c^2B^2-E^2$ و $\vec{B}\cdot\vec{E}$ ، بر اساس قانون‌های تبدیل مؤلفه‌های بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{E}$ ، یعنی رابطه‌های (۷) از ۸۰۵ و (۴) از ۹۰۵، انجام می‌گیرد. اگر این رابطه‌ها را در عبارت‌های

$$c^2B^2-E^2=c^2(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(E_x^2+E_y^2+E_z^2)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{E}=B_xE_x+B_yE_y+B_zE_z$$

به‌کار بریم، بعد از انجام عمل‌های سادهٔ جبری، به‌دست می‌آید:

$$c^2B^2-E^2=c^2B'^2-E_z'^2$$

که در آن

$$c^2B'^2-E'^2=c^2(B_x'^2+B_y'^2+B_z'^2)-(E_x'^2+E_y'^2+E_z'^2);$$

و

$$\vec{B}\cdot\vec{E}=\vec{B'}\cdot\vec{E'}$$

که در آن

$$\vec{B'}\cdot\vec{E'}=B_x'E_x'+B_y'E_y'+B_z'E_z'$$

یعنی عبارت‌های مفروض، ناوردا هستند.

وجود رابطه‌های (۷) (از ۸۰۵) و (۴) (از ۹۰۵) و عبارت‌های ناوردایی که از ترکیب بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ (میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی) به‌دست می‌آیند، به‌این معناست که:

۱) تنها چیزی که مستقل از چارچوب مرجع لخت وجود دارد، میدان الکترومغناطیسی $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ است که در یک چارچوب مرجع لخت ممکن است به‌صورت میدان خالص الکتریکی و در دیگری به‌صورت میدان خالص مغناطیسی ظاهر شود.

۲) میدان الکترومغناطیسی، خصلتی نسبیتی دارد.

۱۱۰۵. چون تغییر انرژی کل ذره، با کار نیرویی که بر آن وارد

می‌آید، برابر است، یعنی $\Delta E = A$، بنابراین داریم:

$$\Delta E = \gamma mc^2 - mc^2 \quad (v_0 = 0 \text{ زیرا})$$

$$A = qU$$

و از آن‌جا

$$\gamma mc^2 - mc^2 = qU$$

اگر این معادله را نسبت به v حل کنیم $\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$، به‌دست می‌آید:

$$v = \frac{\sqrt{\frac{2qU}{m}\left(1+\frac{qU}{2mc^2}\right)}}{1+\frac{qU}{mc^2}} \qquad (1)$$

از (۱) نتیجه می‌شود: الف) به‌ازای $qU \ll mc^2$:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{qU}{mc^2}\right) \ll c$$

ب) به‌ازای $qU \gg mc^2$:

$$v = c\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{qU}\right)^2\right] \approx c$$

۱۲۰۵. از قانون اصلی دینامیك، $\frac{\Delta p}{\Delta t} = qE$، به‌دست می‌آید:

$$\Delta(p - qEt) = 0 \;\Rightarrow\; p - qEt = \text{const}$$

از آن‌جا که بنابر فرض، به ازای $t = 0$ داریم: $p = p_0$، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$p = p_0 + qEt$$

که اگر در آن قرار دهیم: $q = \gamma mv$، برای سرعت ذره خواهیم داشت:

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2}{\alpha^2}}} \qquad (1)$$

که در آن $\alpha=\frac{p_0+qEt}{m}$.

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که، به ازای $t\to\infty$، داریم: $v\to c$، یعنی ذرهٔ میدان الکتریکی را نمی‌توان با سرعت مبنا گسیل کرد.

۱۳.۵. تحت‌تأثیر میدان الکتریکی، انرژی ذره به‌مقدار ΔW کاهش می‌یابد:

$$\Delta W=-eEl$$

چون $\Delta W=mc^2-W$ (طبق فرض مسأله)، بنابراین طول l چنین می‌شود:

$$l=\frac{W-mc^2}{Ee} \qquad (1)$$

۱۴.۵. ضمن حرکت ذره در میدان مغناطیسی، نیروی لورنتس بر آن وارد می‌آید، که برابر است با: $F=qv_0B$ [رابطهٔ (۲) از مسألهٔ ۵.۵ را ببینید]. نیروی لورنتس بر بردار سرعت $\vec{v}_0$ عمود است، بنابراین، حرکت ذره، روی محیط دایره‌ای انجام می‌گیرد که شعاع آن چنین است:

$$r=\frac{p}{qB} \qquad (1)$$

که درآن $p=\gamma mv_0$، اندازهٔ حرکت ذره است.

رابطهٔ (۱) را با استفاده ازقانون‌اصلی دینامیك، $\gamma ma=F$ (به‌ازای $\vec{F}\perp\vec{v}$) و رابطهٔ شتاب مرکزگرا، $a=\frac{v_0^2}{r}$، به‌دست‌آوردیم.

نتیجه‌گیری‌های کوتاه:

اگر در چارچوب مرجع لخت K'، دو بار ساکن q و Q، بـه‌فاصلهٔ r' از یکـدیگـر واقع باشند، در ضمن، پاره‌خطی کـه آن‌ها را به‌هم وصل می‌کند؛ برسرعت نسبی عمود باشد، آن‌وقت، برهم‌کنش آن‌ها نیروی خالص الکتریکی است که با قانون کولن معین می‌شود (برای مقدارهای خیلی کوچك r'): $F'_\perp=\frac{kpQ}{r'^2}$، که در آن $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K،

نیروی الکترومغناطیسی، بین این بارها عمل می‌کند: $\vec{F}_{\perp}=\vec{F}_e+\vec{F}_m$، که در آن $F_e=\frac{k\gamma qQ}{r^2}$ و $F_m=-\frac{k\gamma qQv^2}{r^2c^2}$ به‌ترتیب عبارتند از مؤلفهٔ الکتریکی و مؤلفهٔ مغناطیسی نیروی $\vec{F}_{\perp}$.

بر بار Q از جانب رسانای حامل جریان I و سرعت $\vec{v}$، به‌موازی محور خودش، نیروی مغناطیسی $F_m=\frac{Qv\mu_0 I}{2\pi r}$ وارد می‌آید، که در آن r فاصلهٔ از بار Q تا رساناست و $\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$.

در حالت کلی، بر بار Q که با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند، نیروی $F_m=QvB\sin\alpha$، از جانب میدان مغناطیسی وارد می‌شود، که در آن، B قدرمطلق میدان مغناطیسی است و $\alpha=(\vec{B},\vec{v})$.

همهٔ این پدیده‌های الکترومغناطیسی، به طور نظری و تنها بر اساس نظریهٔ نسبیت خاص، به‌دست‌آمده‌اند و بنابراین حقیقت‌هایی نسبیتی هستند.

رابطه‌های تبدیل (برای چارچوب‌های مرجع لخت K' و K)، بردارهای شدت $\vec{E}$ میدان الکتریکی و القای $\vec{B}$ میدان مغناطیسی، چنین‌اند:

$$E_x=E'_x\ ,\ E_y=\gamma(E'_y+vB'_z)\ ,\ E_z=\gamma(E'_z-vB'_y) \qquad (1)$$

$$B_x=B'_x\ ,\ B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{v}{c^2}E'_z\right)\ ,\ B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{v}{c^2}E'_y\right) \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

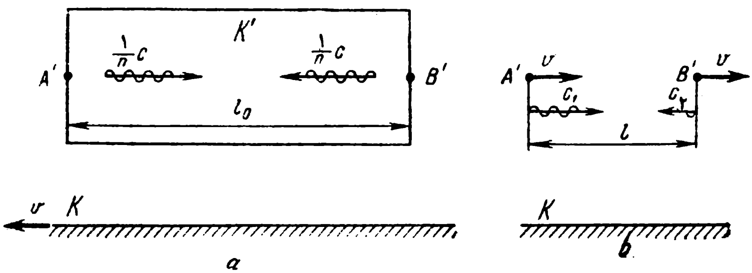
$$c^2B^2-E^2=\mathrm{inv}\ ,\ \vec{B}\cdot\vec{E}=\mathrm{inv}$$

رابطه‌های (۱) و (۲)، به‌معنای ناوردایی مفهوم الکترومغناطیسی‌هستند که ممکن است، در یك چارچوب مرجع لخت، به‌صورت میدان خالص الکتریکی و در چارچوب مرجع لخت دیگر، به صورت میدان خالص مغناطیسی ظاهر شود.

§ ۶. نسبیت در نور شناخت و فیزیک هسته‌ای

۶.۱. زمان انتشار موج نوری، درچارچوب مرجع لخت K' (شکل ۷۶-a)، برابر است با

$$\tau_0 = \frac{2l_0}{\frac{1}{n}c} \qquad (1)$$



شکل ۷۶

که درآن، $\frac{1}{n}c$، سرعت نور در محیط با ضریب شکست n، و c سرعت نور در خلاء است. در چارچوب مرجع لخت K (شکل ۷۶-b)، زمان انتشار موج نوری در مسیر «رفت-برگشت» برابر است با

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

که درآن

$$\tau_1 = \frac{l}{c_1 - v}, \quad \tau_2 = \frac{l}{c_2 + v}$$

به‌ترتیب، زمان «رفت» و زمان «برگشت» را نشان می‌دهند و

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad c_1 = \frac{\frac{1}{n}c + v}{1 + \frac{v}{nc}}, \quad c_2 = \frac{\frac{1}{n}c - v}{1 - \frac{v}{nc}}$$

c_1 و c_2 به ترتیب معرف سرعت موج نوری در «رفت» و «برگشت» هستند (بنابر قانون نسبیتی تبدیل سرعت). به‌این ترتیب

$$\tau=\frac{2l_0 n}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

از (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\tau}{\tau_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

نتیجهٔ (۳) با رابطهٔ (۱) از **۲۱۰۲** سازگار است که درستی محاسبه را تأیید می‌کند.

۲۰۶. ضریب شکست را درمحیط ساکن چارچوب مرجع لخت K'، برابر n مـی‌گیریم؛ سرعت نور در این محیط برابر $c'=\frac{1}{n}c$ می‌شود، که در آن، c سرعت نور در خلاء است. سرعت نور در چارچوب مرجع لخت K، در محیط، برابر است با

$$\frac{c}{n^*}=\frac{c'+v}{1+\frac{c'v}{c^2}}=\frac{c+nv}{n+\frac{v}{c}}$$

که درآن، n^* ضریب شکست در محیط متحرك است. از ایـن برابری نتیجه می‌شود:

$$n^*=\frac{n+\beta}{1+n\beta}\neq n \Rightarrow n\neq \mathrm{inv} \tag{1}$$

۳۰۶. سرعت نور در چـارچـوب مرجع لخت K'، وابسته به‌آب، ضمن حرکت «رفت» و «برگشت» برابر است با

$$c'_1=c'_2=\frac{c}{n}$$

بنابراین، در چارچوب مرجع لخت K (لوله)، این سرعت برابر است با

$$c_1=\frac{c+nv}{n+\frac{v}{c}}\ ,\ c_2=\frac{c-nv}{n-\frac{v}{c}}$$

زمان مجهول بـرابـر است با $\tau=\tau_1+\tau_2$، که درآن، $\tau_1=\frac{l_0}{c_1}$ و $\tau_2=\frac{l_0}{c_2}$. بعد از تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$\tau=\frac{2l_0n(1-\beta^2)}{c(1-n^2\beta^2)}\qquad\left(\beta=\frac{v}{c}\right)\qquad(1)$$

۴۰۶. در چارچوب مرجع آزمایشگاه، سرعت دو موج نوری به‌ترتیب چنین‌اند:

$$c_1=\frac{c+nv}{n+\frac{v}{c}}\ ,\ c_2=\frac{c-nv}{n-\frac{v}{c}}$$

چون برای زمان‌های «رفت» و «برگشت» به‌ترتیب داریم:

$$\tau_1=\frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c_1-v}\ ,\ \tau_2=\frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c_2+v}$$

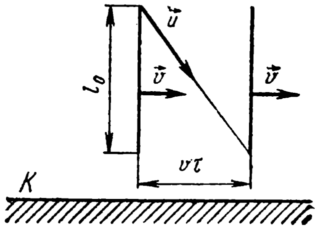
بنابراین

$$\Delta\tau=\tau_1-\tau_2=\frac{2l_0v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

طبق فرض مسأله: $v\ll c$ $\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 1\right)$، بنابراین

$$\Delta\tau=\frac{2l_0v}{c^2}=10^{-7}\ \text{(ثانیه)}$$

۵۰۶. درچارچوب مرجع لخت K' (میله)، زمان انتشار موج نوری در میله $\tau_0=\frac{l_0n}{c}$ است. نسبت به‌چارچوب مرجع لخت K (شکل۷۷) داریم:



شکل ۷۷

$$l_0^2+v^2\tau^2=u^2\tau^2$$

که در آن، u سرعت مجهول نور و τ زمان انتشار موج نوری در میله (در چارچوب مرجع لخت K) است. اگر در نظر بگیریم: $\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (۲۲۰۲ را ببینید)، به‌دست می‌آید:

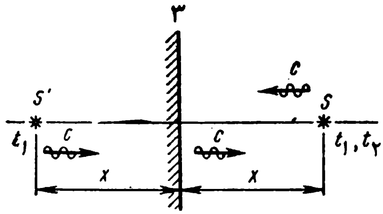
$$u=\sqrt{v^2+\frac{c^2}{n^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad (1)$$

۶۰۶. ۱) ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که آئینه و چشمهٔ نور S ساکن باشند. t_1 را لحظهٔ گسیل موج نوری ازچشمهٔ S و t_2 را لحظهٔ برگشت موج بازتابیده ازآئینه به‌چشمه می‌گیریم. در این صورت

$$t_2=t_1+\frac{2x}{c}$$

این رابطه را می‌توان چنین تعبیر کرد: در فاصلهٔ x پشت آئینه، چشمهٔ دیگر S' واقع است و موج نوری، ضمن رسیدن به S، در لحظهٔ t_1 از چشمهٔ S' گسیل شده است (شکل ۷۸). در ضمن، S' را تصویر چشمهٔ S گویند. بحث بعدی خود را بر اساس همین تعبیر استوار کرده‌ایم.

۲) فرض کنیم آئینه، در چارچوب مرجع لخت K، با سرعت v به‌طرف چشمهٔ ساکن S حرکت کند، در ضمن فاصلهٔ بین آن‌ها در لحظهٔ t_1 برابر x باشد (شکل ۷۹). اگر نور در لحظهٔ t_1 از چشمه به طرف آئینهٔ گسیل شده باشد،آن‌وقت در لحظهٔ



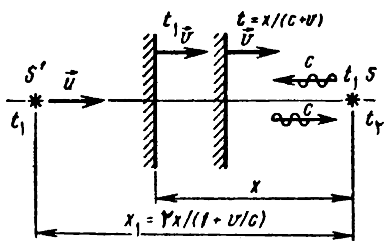
شکل ۷۸

$$t_2 = t_1 + \frac{2x}{c+v} \qquad (1)$$

به‌آن برمی‌گردد. یعنی تصویر S' در لحظهٔ t_2 در فاصلهٔ

$$x_1 = \frac{2x}{1+\frac{v}{c}} \qquad (2)$$

از چشمهٔ S قرار دارد.



شکل ۷۹

بعد از گذشت زمان Δt، شبیه (۲)، برای تصویر چشمه داریم:

$$x_2 = \frac{2(x - v\Delta t)}{1+\frac{v}{c}} \qquad (3)$$

بعد از زمان Δt، تصویر S' [بر مبنای (۲) و (۳)] به‌اندازهٔ

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2v\Delta t}{1+\frac{v}{c}}$$

جا به‌جا می‌شود. از آن جا معلوم می‌شود که $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، یعنی سرعت تصویر S' در چارچوب مرجع لخت K، برابر است با

$$u=\frac{2v}{1+\frac{v}{c}} \qquad (۴)$$

۳) در حالت حرکت آئینه از چشمه، با بحث مشابهی به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{2v}{1-\frac{v}{c}} \qquad (۵)$$

۷۰۶. از شکل ۸۰–a، درچارچوب مرجع لخت K'، به‌دست می‌آید:

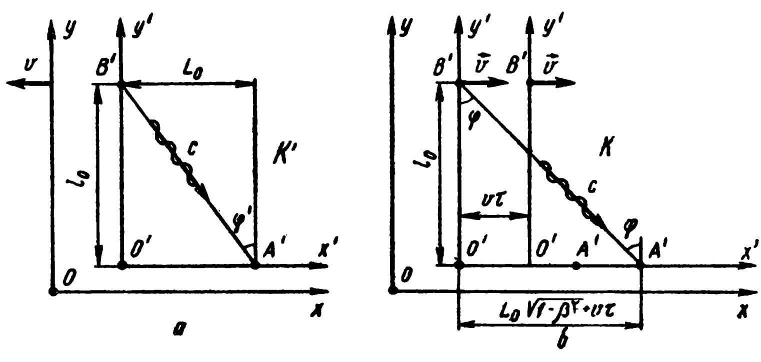
$$tg\,\varphi'=\frac{L_0}{l_0}\ ,\quad \cos\varphi'=\frac{l_0}{c\tau'}\ ,\quad \sin\varphi'=\frac{L_0}{c\tau'} \qquad (۱)$$

که در آن، τ' زمان انتشار نور در مسیر $B'A'$ در چارچوب مرجع لخت K' است.

در چارچوب مرجع لخت K (شکل ۸۰–b)، خواهیم داشت:

$$tg\,\varphi=\frac{L_0\sqrt{1-\beta^2}+v\tau}{l_0}\ ,\quad \cos\varphi=\frac{l_0}{c\tau}\ ,$$

$$\sin\varphi=\frac{L_0\sqrt{1-\beta^2}+v\tau}{c\tau} \qquad (۲)$$



شکل ۸۰

که درآن، τ زمان گسیل نور از B' تا A' نسبت به چارچوب مرجع لخت K،که بنابر تبدیل‌های لورنتس (۲۸۰۲ را ببینید) چنین است:

$$\tau=\frac{\tau'+\frac{v}{c^{۲}}L_{\circ}}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}} \qquad \left(\beta=\frac{v}{c}\right) \tag{۳}$$

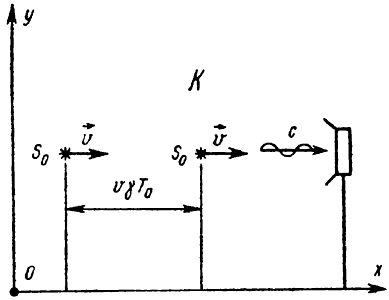
از (۱) و (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$tg\,\varphi=\frac{\sin\varphi'+\beta}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}\cos\varphi'}\ ,\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{۱-\beta^{۲}}\cos\varphi'}{۱+\beta\sin\varphi'},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin\varphi'+\beta}{۱+\beta\sin\varphi'} \tag{۴}$$

۸۰۶. در چارچوب مرجع لخت K (اتومبیل)، چراغ راهنما (چشمهٔ نور $S_{\circ}$) با سرعت v بــه سوی اتومبیل (گیرنــدهٔ سیگنال نوری) حرکت می‌کند (شکل ۸۱). چون دورهٔ تابش در چارچوب مرجع لخت $K_{\circ}$ (چشمهٔ $S_{\circ}$) برابر است با $T_{\circ}=\frac{۱}{\nu_{\circ}}$، بنابراین طبق نظریهٔ نسبیت خاص، ایــن دورهٔ تناوب درچارچوب مرجع لخت K، برابراست با $\gamma T_{\circ}$ $\left(\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}\right)$ و عبارت است از زمان بین ابتدا و انتهای گسیل یك موج نوری. اگر هم چشمهٔ $S_{\circ}$ در چارچوب مرجع لخت K ساکن باشد، دریافت ابتدا و انتهای موج نوری با فاصلهٔ زمانی $\gamma T_{\circ}$ اتفاق می‌افتد. ولی ازآن‌جا که چشمهٔ $S_{\circ}$ با سرعت v بــه سمت گیرنده حرکت می‌کند (شکل ۸۱ را ببینید)، انتهای موج فاصله‌ای به اندازهٔ $\gamma vT_{\circ}$ کمتر از ابتدای آن طی می‌کند و، بنابراین، دورهٔ دریافت تابش به‌اندازهٔ زمان $\frac{\gamma vT_{\circ}}{c}$ کوتاه‌تر می‌شود:

$$T=\gamma T_{\circ}-\frac{\gamma vT_{\circ}}{c}=\gamma T_{\circ}\left(۱-\frac{v}{c}\right)$$



شکل ۸۱

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\nu=\nu_\circ\sqrt{\frac{۱+\beta}{۱-\beta}} \qquad (۱)$$

که در آن، $\nu_\circ$ بسامد ویژهٔ نور (در چارچوب مرجع چشمه)، ν بسامدی‌که نور (در چارچوب مرجع گیرنده) پیدا می‌کند، $\beta=\frac{v}{c}$ و v سرعت نسبی چشمه و گیرنده است.

به‌همین ترتیب، در حالتی‌که چشمهٔ نور و گیرنده ازهم دور می‌شوند، به‌دست می‌آید:

$$\nu=\nu_\circ\sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را، اثر طول نسبیتی دوپلر می‌نامند و، بنابرآن، نور با بسامد $\nu_\circ$ از چشمه، که با سرعت v به گیرنده (ناظر) نزدیک می‌شود، به وسیلهٔ گیرنده با بسامد $\nu>\nu_\circ$ گرفته می‌شود (انتقال به‌بنفش) و در حالت دور شدن چشمه ازگیرنده، به‌صورت نوری با بسامد $\nu<\nu_\circ$ (انتقال به‌قرمز).

بنابراین، راننده می‌تواند بدون توقف از چراغ راهنما عبور کند، زیرا به‌ازای سرعت مشخص v برای اتومبیل، راننده نور قرمز چراغ‌راهنما با بسامد $\nu_\circ$ را سبز (با بسامد $\nu>\nu_\circ$) می‌بیند.

۹.۶. به‌ازای انتقال به قرمز [رابطهٔ (۲) از مسألهٔ ۸.۶ را ببینید]، سحابی با سرعت

$$v=c\frac{1-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}$$

از زمین دور می‌شود: چون $\lambda\nu=c$ (λ، طول موج)، پس

$$v=c\frac{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \qquad (1)$$

که به‌ازای $\lambda=4/360\times10^{-7}m$ و $\lambda_0=4/320\times10^{-7}m$، به‌دست می‌آید:

$$v=0/0053c=1590 \text{ (کیلومتر بر ثانیه)}$$

۱۰.۶. از رابطه‌های (۱) و (۲) مسألهٔ **۸.۶** سرعت سفینهٔ فضایی را تعیین می‌کنیم:

$$v=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)c \quad , \quad \alpha>1 \qquad (1)$$

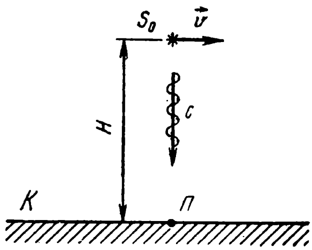
$$v=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)c \quad , \quad \alpha<1 \qquad (2)$$

که درآن $\alpha=\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2$. رابطهٔ (۱) متناظر با نزدیك شدن سفینهٔ فضایی به‌زمین و رابطهٔ (۲) متناظر با دور شدن ازآن است.

۱۱.۶. در چارچوب مرجع لخت K وابسته بـه سطح زمین: چشمهٔ سیگنال‌های رادیـویـی S_0، با سرعتی در جهت عمود بر ارتفاع حرکت می‌کند (شکل ۸۲). اگـر دورهٔ تابش در چارچوب مرجع لخت $T_0=\frac{1}{\nu_0}$ باشد، آن‌گاه بنابر اثر نسبیتی بازهٔ زمانی در چارچوب مرجع لخت K، این دوره برابر خواهد بود با γT_0 $\left(\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$. دراین‌صورت (به‌ازای

مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ H)، ابتدا و انتهای موج الکترومغناطیسی در زمانی برابر $T=\gamma T_{\circ}$ به‌گیرندهٔ Π می‌رسد. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$\nu=\nu_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}} \qquad \left(\beta=\frac{v}{c}\right) \qquad (1)$$



شکل ۸۲

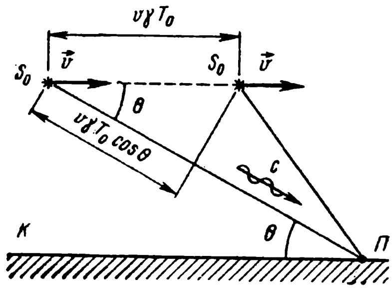
رابطهٔ (۱)، اثر عرضی دوپلر است و بنابرآن، بسامد سیگنال رادیویی دریافت شدهٔ ν، به اندازهٔ $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ بار ازبسامد تابش $\nu_{\circ}$ کمتر است،به‌شرط آن که جهت سرعت $\vec{v}$ چشمه، بر امتداد مسیرش تا گیرنده عمود باشد.

۱۲۰۶. اگر در چارچوب مرجع $S_{\circ}$، دورهٔ تابش نور برابر $T_{\circ}=\frac{1}{\nu_{\circ}}$ باشد،آن‌وقت در چارچوب مرجع لخت K (گیرنده)، بنابر نظریهٔ نسبیت خاص، برابربا $\gamma T_{\circ}$ خواهد بود. ابتدا وانتهای تابش یک موج‌نوری در فاصلهٔ زمانی کمتر از $\gamma T_{\circ}$ به گیرنده می‌رسد؛ ایـن اختلاف، با اندازهٔ اختلاف زمانی حرکت آن‌ها، یعنی $\frac{v\gamma T_{\circ}}{c}\cos\theta$ برابر است (شکل ۸۳ را ببینید). بنابراین

$$T=\gamma T_{\circ}-\frac{v\gamma T_{\circ}}{c}\cos\theta$$

از این‌جا دستور کلی اثر نسبیتی دوپلر به‌دست می‌آید:

$$\nu=\frac{\nu_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}}}{1-\beta\cos\theta}, \qquad \left(\beta=\frac{v}{c}\right) \qquad (1)$$



شکل ۸۳

از رابطهٔ (۱)، به‌ازای $\theta = 0°$ یا $\theta = 180°$، اثر طولی دوپلر(۶-۸۰ را ببینید) و، به‌ازای $\theta = 90°$، اثرعرضی دوپلر به‌دست می‌آید (۶-۱۱۰ را را ببینید).

۶-۱۳۰. ابتدا تغییرزاویهٔ بین جهت حرکت سفینه ($\vec{v}$) وراستای یك ستاره را، ضمن مشاهدهٔ نتیجه‌های حاصل در چارچوب مرجع لخت K' ـ که نسبت به‌آن با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند ـ مورد بررسی قرار می‌دهیم. درضمن، به‌دو حالت نظرداریم: وقتی‌که ستاره در جهت حرکت سفینه قرار دارد، و وقتی‌که در خلاف جهت‌آن، حرکت می‌کند.

در چارچوب مرجع لخت K (شکل ۸۴-a) داریم:

$$\sin\theta = \frac{\Delta y}{c\Delta t} \quad , \quad \cos\theta = \frac{l_0}{c\Delta t} \tag{1}$$

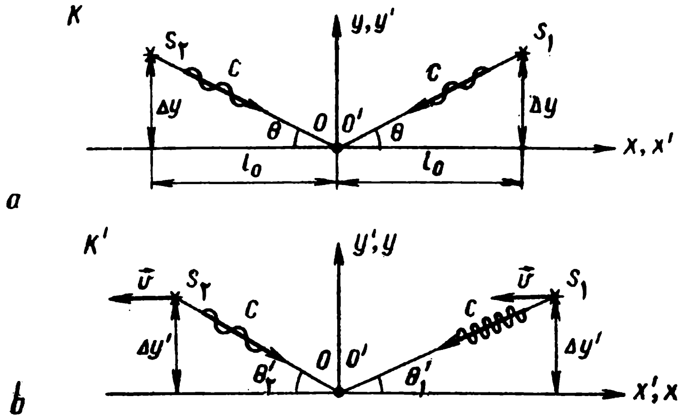
که درآن، θ معرف راستای ستارهٔ S_1 و S_2 نسبت به‌ناظر زمینی و Δt،زمان انتشار نور از ستاره‌هاست.

در چارچوب مرجع لخت K' (یعنی در چارچوب مرجع سفینه)، راستای ستارگان S_1 و S_2 ـ یعنی زاویه‌های θ'_1 وθ'_2 ـ به‌این ترتیب‌به‌دست می‌آیند (شکل ۸۴-b):

$$\sin\theta'_1 = \frac{\Delta y'}{c\Delta t'_1} \quad , \quad \sin\theta'_2 = \frac{\Delta y'}{c\Delta t'_2} \tag{2}$$

که بنابر تبدیل لورنتس (مسألهٔ ۲-۲۹۰ را ببینید):

$$\Delta y' = \Delta y$$



شکل ۸۴

$$\Delta t'_۱ = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^۲} l_۰}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

(۳)

$$\Delta t'_۲ = \frac{\Delta t' - \frac{v}{c^۲} l_۰}{\sqrt{۱-\beta^۲}}$$

در این صورت، از (۱) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$\sin\theta'_۱ = \frac{\sin\theta\sqrt{۱-\beta^۲}}{۱+\frac{v}{c}\cos\theta}$$

(۴)

$$\sin\theta'_۲ = \frac{\sin\theta\sqrt{۱-\beta^۲}}{۱-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

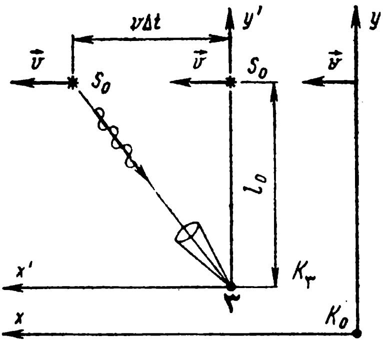
که ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\theta'_۲ > \theta'_۱ \qquad (۵)$$

به این ترتیب، درمقایسه با ناظرزمینی، برای فضانوردی که در سفینه است، ستارگان درجهت حرکت سفینه متراکم و درخلاف جهت آن، پراکنده

می‌شوند. در نتیجه، نسبت تراکم تعداد ستارگان مرئی در چراغ جلو سفینه، به تراکم تعداد ستارگان مرئی در نور چراغ عقب سفینه، این طور به‌دست می‌آید:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\theta'_2}{\theta'_1}=\frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (\text{برای مقدرهای کوچک } \theta'_1 \text{ و } \theta'_2) \qquad (6)$$



شکل ۸۵

رابطهٔ (۶) را به‌این ترتیب پیدا کردیم: اگر تعداد ستارگان را برای هر دو چراغ N بگیریم، برای چراغ جلوی $\rho_1=\frac{N}{S_1}$ و برای چراغ عقبی $\rho_2=\frac{N}{S_2}$؛ کــه درآن‌ها، $S_1\approx R^2\theta_1$ و $S_2\approx R^2\theta_2$، بخش‌هایی از سطح کره‌ای به‌شعاع R (کرهٔ آسمان) هستند و هر دوشامل N ستاره باشند؛ و از همین عبارت‌ها، رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آید.

به کمك همین رابطه می‌توان متوجه شدکــه درخشش آسمان در جلو سفینه، بیشتر از درخشش آسمان پر ستاره در پشت سفینه است.

براساس اثر دوپلر (۸.۶ را ببینید) نتیجه می‌گیریم: ستارگانی‌که در جلو سفینه مرئی هستند «بنفش» و ستارگان عقب سفینه «قرمز» دیده می‌شوند.

۱۴.۶ . فرض می‌کنیم در چارچوب مرجع لخت K_0 (در چارچوب مرجع ستارهٔ S_0)، نورناشی از ستاره در طول محور y، که بر امتدادسرعت $\vec{v}$ زمین عمود است، حرکت کند (شکل ۱۵ را ببینید). در این صورت، در

چارچوب مرجع لخت K_3 وابسته به زمین، نور در امتدادی حرکت می‌کند که با زاویهٔ φ مشخص می‌شود (شکل ۸۵ و حل مسألهٔ ۱۳۰۶ را ببینید) و برای آن داریم: $tg\,\varphi=\frac{v\Delta t}{l_0}$. چون

$$l_0^2+v^2\Delta t^2=c^2\Delta t^2$$

بنابراین

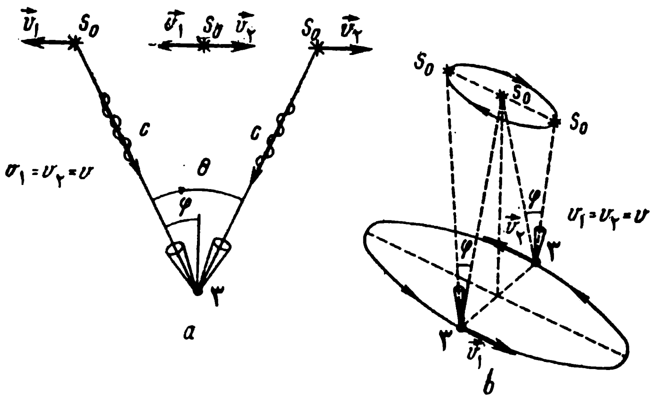
$$tg\,\varphi=\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

پدیدهٔ تغییر امتداد انتشار نور، ضمن عبور از یک چارچوب مرجع لخت‌به‌چارچوب مرجع‌لخت دیگر، ابیراهی (انحراف) نورنامیده می‌شود. رابطهٔ(۱)،زاویهٔ ابیراهی را معین می‌کند. به‌ازای $v\ll c$ ازآن نتیجه‌می‌شود: $tg\,\varphi=\frac{v}{c}$. این زاویه (یعنی زاویهٔ بین محور تلسکوپ و امتداد واقعی به سوی ستاره) برای ستارگان مختلف، متفاوت است (به v، سرعت نسبی ستاره و زمین، و زاویهٔ بین و امتداد واقعی روی ستاره و بردار $\vec{v}$، بستگی دارد).

اگر جهت سرعت $\vec{v}$ ثابت باشد (قدرمطلق‌آن هم، تقریباً ثابت است)، ابیراهی نور ستاره، برای آزمایشگاه زمینی، قابل مشاهده نیست و موضع ستاره درکرهٔ آسمانی، ثابت می‌ماند (اگرچه همین موضع، حاصل ابیراهی است).

چون زمین به‌دور خورشید می‌گردد، برای دو نقطه‌ای از زمین‌که در دو طرف قطر مدار باشند (شکل ۸۶)، زاویهٔ ابیراهی از رابطهٔ $\Delta v=2v$ معین می‌شود ($|\vec{v_1}-\vec{v_2}|=\Delta v$، $v_2=v_1=v$) و بنابراین، $tg\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Delta v}{c}$.

حرکت ظاهری ستاره در تلسکوپ، روی محیط یك بیضی با نیم قطر بزرگتر $\theta=2\varphi$ است. این نتیجهٔ مشاهده‌ای برای همهٔ ستارگان یکی است



شکل ۸۶

و، برای نخستین بار، برادلی اختر شناس سدهٔ هیجدهم انگلیسی آن را کشف کرده و هم او پیدا کرد که: $\theta = ۲۰/۵''$

۱۵۰۶. الف) بنابر رابطهٔ (۲) از **۱۲۰۲** (نزدیك شدن آئینه):

$$T = T_{\circ}\frac{۱-\beta}{۱+\beta}$$

که در آن، $T_{\circ}$ و T به ترتیب فاصلهٔ زمانیِ دو اندازهٔ حرکت متوالی نوری هستند که به آئینه تابیده می‌شود و پس از بازتاب برمی‌گردند؛ $\beta = \frac{v}{c}$. به ازای $T_{\circ} = \frac{۱}{\nu_{\circ}}$ و $T = \frac{۱}{\nu}$ به‌دست می‌آید:

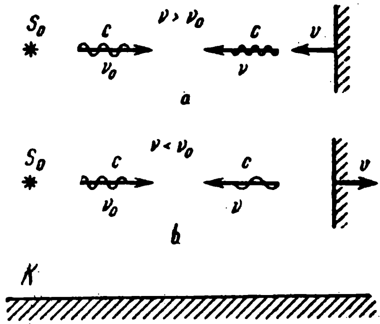
$$\nu = \nu_{\circ}\frac{۱+\beta}{۱-\beta} \qquad (۱)$$

که در آن، $\nu_{\circ}$ و ν به‌ترتیب بسامدهای نور تابیده به‌آئینه و بازتابیده از‌آن هستند.

ب) در حالت دور شدن آئینه [رابطهٔ (۲) از مسألهٔ **۱۲۰۲**] داریم:

$$\nu = \nu_{\circ}\frac{۱-\beta}{۱+\beta} \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) (شکل ۸۷–a و b) را می‌توان بر اساس این



شکل ۸۷

اندیشه هم پیدا کرد که، نور بازتابیده را از چشمهٔ مجازی S' در نظر بگیریم که (بنابر رابطهٔ (۴) از ۶.۶) با سرعت $u = \frac{2v}{1+\beta}$ حرکت می‌کند. در ضمن بسامد خاص نوری که از چشمهٔ S' تابیده می‌شود، با بسامد ν_0، نور چشمهٔ ساکن S، با رابطهٔ

$$\nu'_0 = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

به‌هم مربوط‌اند. از این‌رو بنابر اثر دوپلر برای چشمهٔ مجازی S'، داریم:

$$\nu = \nu'_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}$$

که به‌همان رابطهٔ (۱) منجر می‌شود.

اثری کــه در رابطه‌های (۱) و (۲) شرح دادیم، مثلاً در ابزارهای ردیابی مورد استفاده قــرار می‌گیرنــد و بــه کمك آن‌ها، سرعت حرکت اتومبیل‌ها را کنترل مــی‌کنند. مثلاً وقتی کــه سرعت اتــومبیلی ۱۰۸ = v (کیلومتردرساعت) باشد، تغییر بسامد ضمن بازتابش سیگنال الکترومغناطیسی که از اتومبیل گسیل می‌شود، بنابر (۱): برابر است با

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{\circ}}=\frac{\nu-\nu_{\circ}}{\nu_{\circ}}=\frac{\frac{۲u}{c}}{۱-\frac{v}{c}}\approx ۲\times ۱۰^{-۷}$$

و ردیاب می‌تواند چنین انحراف‌هایی را کشف کند.

۱۶.۶ فرض کنیم جریانی نوترونی با انرژی کل E و اندازهٔ حرکت $\frac{E}{c}$ عمود بر سطحی به‌مساحت S در خلال مدت زمان Δt فرودآید، درضمن تمامی انرژی فوتون‌ها به‌وسیلهٔ این سطح جذب شود. در این صورت، تغییر اندازهٔ حرکت $F\Delta t$ سطح برابر است با اندازهٔ حرکت مجموع همهٔ فوتون‌ها، یعنی $\frac{E}{c}$. بنابراین، نیروی وارد بر آن $F=\frac{E}{c\Delta t}$ و فشار برابر است با $\frac{E}{S\Delta t}\cdot\frac{۱}{c}=\frac{F}{S}$.

۱۷.۶ فرض می‌کنیم ضریب بازتاب سطحی، ρ باشد (به‌ازای $\rho=۱$ با سطح آئینه‌ای سروکار داریم و به‌ازای $\rho=\circ$، تمامی نور به‌وسیلهٔ سطح جذب می‌شود). در این صورت، تغییر اندازهٔ حرکت آن برابر است با $(|\Delta\vec{p}|=|(-\rho\vec{p}-\vec{p})|)$ $(\rho+۱)p$، که p اندازهٔ حرکت نور فرودی است. بنابراین، نیرویی که بر سطحی به مساحت S وارد می‌آید برابر است با

$$F=\frac{(\rho+۱)p}{\Delta t}=\frac{(\rho+۱)E}{c\Delta t}=\frac{(\rho+۱)N}{c}$$

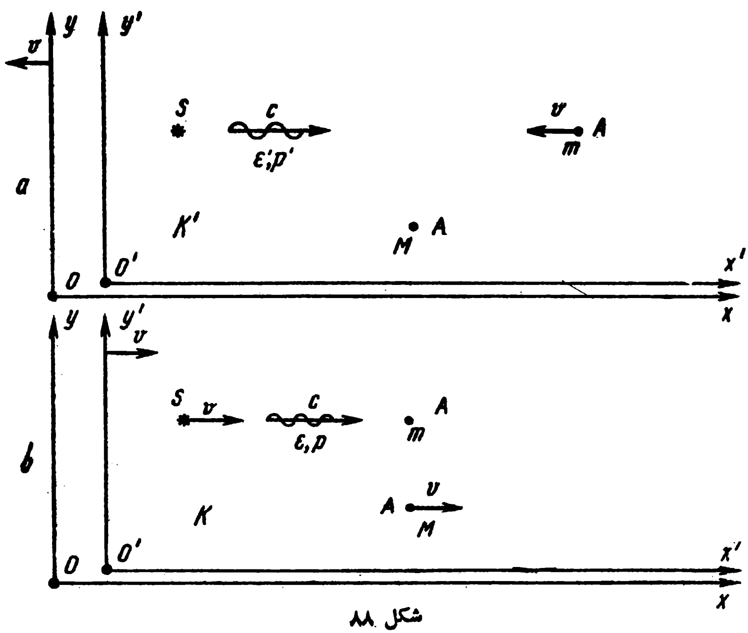
که درآن، E انرژی و $N=\frac{E}{\Delta t}$ توان جریان نور است.

طبق فرض مسأله $N=۱$ (ولت)، بنابراین به ازای $\rho=۱$ داریم: $F=\frac{۲N}{c}=۶\times ۱۰^{-۹}$ (نیوتون) و به‌ازای $\rho=\circ$: $F=\frac{N}{c}=۳\times ۱۰^{-۹}$ (نیوتون).

۱۸۰۶. آزمایش ذهنی زیـر را در نظر مـی گیریـم. فرض کنید در چارچوب مـرجع لخت K'، جسم A کـه با سرعت v حرکت می کند، در لحظه‌ای از زمان، فوتونی با انرژی ε' را ــ کـه از چشمهٔ ساکن S گسیل شده است ــ جذب کند (شکل ۸۸–b). با فرض این کـه جسم A در نتیجهٔ برهم کنش با فوتون متوقف شود، درچارچوب مرجع لخت K (شکل ۸۸–b)، قانون‌های بقای انرژی و اندازهٔ حرکت را برای سیستم «فوتون ــ جسم A» می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \varepsilon' + \gamma mc^{2} = Mc^{2} \\ \dfrac{\varepsilon'}{c} - \gamma mv = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon + mc^{2} = \gamma Mc^{2} \\ \dfrac{\varepsilon}{c} = \gamma Mv \end{cases} \qquad (2)$$



شکل ۸۸

که در آن‌ها، m و M بــه‌ترتیب جرم جسم A، قبل و بعد از جذب فوتون؛ $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$؛ ε انرژی فــوتــون در چارچوب مرجع لخت K هستند.

به‌کمک رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان قانون تبدیل انرژی فوتون را، ضمن عبور از چارچوب مــرجع لخت K' به چارچوب مــرجع لخت K، پیدا کرد:

$$\varepsilon'=\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \qquad (۳)$$

فرض‌کنید چشمهٔ S، کــه در چارچوب مرجع لخت K' ساکن است، نوری با بسامد ν'_0 گسیل‌کند. در چــارچــوب مرجع لخت K، چشمهٔ S با سرعت v به‌سوی‌گیرندهٔ ساکن ــ جسم A ــ حرکت می‌کند. بنابر اثر دوپلر [رابطهٔ (۱) از مسألــهٔ ۸۰۶ را ببینید] بسامد ν نور، کــه بــر جسم A فرود می‌آید، با رابطهٔ زیر، با بسامد ν'_0 مربوط می‌شود:

$$\nu'_0=\nu\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) به‌دست می‌آید: $\frac{\varepsilon}{\nu}=\frac{\varepsilon'}{\nu'_0}$، یعنی

$$\frac{\varepsilon}{\nu}=\text{inv} \qquad (۵)$$

این مقدار ناوردا را، که به ثابت پلانك معروف است، با h نشان می‌دهند؛ به‌این ترتیب، به‌رابطهٔ مشهوری می‌رسیم که انرژی فوتون یا کوانتوم تابش الکترومغناطیسی را بیان می‌کند: $\varepsilon=h\nu$.

۰۱۹۰۶ الف) درچارچوب مرجع K' وابسته به‌آئینه، اندازهٔ حرکتی

که‌آئینه دریافت می‌کند برابر است با تغییر اندازهٔ حرکت فوتون (از مقدار $\vec{p'}$ به $\vec{p'}-$؛ در بازتاب بــه وسیلهٔ آئینه، قدرمطلق اندازهٔ حرکت تغییر نمی‌کند)، یعنی

$$\Delta p'=2p'=2\frac{\varepsilon'}{c}=2h\frac{\nu'}{c}=2\frac{h\nu_0}{c}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \qquad (1)$$

که درآن، از رابطهٔ اثر دوپلر، در حالت نزدیك شدن چشمه به‌آئینه استفاده شده است [رابطهٔ (۱) در مسألهٔ ۸.۶ را ببینید].

ب) در چــارچــوب مرجع لخت K، که آئینه نسبت به‌آن حرکت می‌کند، بسامد نوری که‌فرود می‌آید ν_0 وبسامد نوری که بازمی‌تابد ν است و با رابطهٔ (۱) از ۱۵.۶ به‌هم مربوط‌اند:

$$\nu=\nu_0\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

بنابراین، تغییر اندازهٔ حرکت‌آئینه برابر است با

$$\Delta p=|\vec{p}_2-\vec{p}_1|=\frac{h\nu}{c}+\frac{h\nu_0}{c}$$

یعنی

$$\Delta p=\frac{\frac{2h\nu_0}{c}}{1-\frac{v}{c}} \qquad (2)$$

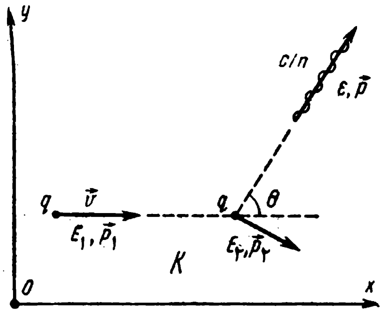
۲۰.۶. اندازهٔ حرکت فوتون در محیطی با ضریب شکست n برابر است با $p=\frac{\varepsilon}{c'}$ که درآن $\varepsilon=h\nu$ انرژی فوتون و c' سرعت نور در محیط مفروض‌است.چون $n=\frac{c}{c'}$، بنابراین‌اندازهٔ‌حرکت‌فوتون‌درمحیط،چنین‌می‌شود:

$$p=\frac{h\nu}{c}n \tag{۱}$$

مسألهٔ مطابقت قانون‌های بقای انرژی واندازهٔ حرکت را برای‌سیستم «بار ـ تابش (فوتون)»، با توجه به‌امکان تابش به وسیلهٔ باری که در محیط حرکت می کند، بررسی می کنیم.

فرض کنید، بار دارای تابش فــوتــون (کوانتوم نور) باشد. در این صورت، بنابر قانون‌های بقای انرژی و اندازهٔ حرکت، برای سیستم «بارـ فوتون» می‌نویسیم (شکل ۸۹ را ببینید):

$$E_۱=E_۲+h\nu \ , \ \vec{p}_۱=\vec{p}_۲+\vec{p} \tag{۲}$$



شکل ۸۹

که درآن‌ها، $E_۱$، $E_۲$، $\vec{p}_۱$ ، $\vec{p}_۲$ عبارتند از انرژی و اندازهٔ حرکت قبل و بعد از تابش و $\vec{p}$ ، اندازهٔ حرکت فوتون است کــه از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

چون $\vec{p}_۱-\vec{p}_۲=\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$ و

$$\vec{v}\cdot\Delta\vec{p}=\vec{v}\cdot\vec{F}\Delta t=\Delta E=E_۱-E_۲$$

بنابراین

$$\Delta E=\vec{v}\cdot\Delta\vec{p} \tag{۳}$$

که‌با توجه به‌رابطه‌های (۲) به‌دست‌می‌آید: $h\nu=\vec{v}\cdot\vec{p}$ یا $h\nu=vp\cos\theta$،

که درآن $\theta=(\widehat{\vec{v}\,,\,\vec{p}})$ عبارت است از زاویهٔ بین راستای حرکت بار و جهت تابش. با در نظرگرفتن (۱) داریم:

$$h\nu=v\frac{h\nu}{c}n\cos\theta$$

و ازآنجا

$$\cos\theta=\frac{c}{nv} \qquad (۴)$$

این رابطه را، شرط تابش واویلوف ـ چرنکوف می‌گویند.

چون داریم: $\cos\theta\leqslant 1$، $v<c$ و $1\leqslant n$، بنابراین از شرط (۴) نتیجه می‌شود: اگر بار به طور یکنواخت در خلاء حرکت کند ($n=1$)، نمی‌تواند تابشی داشته باشد.

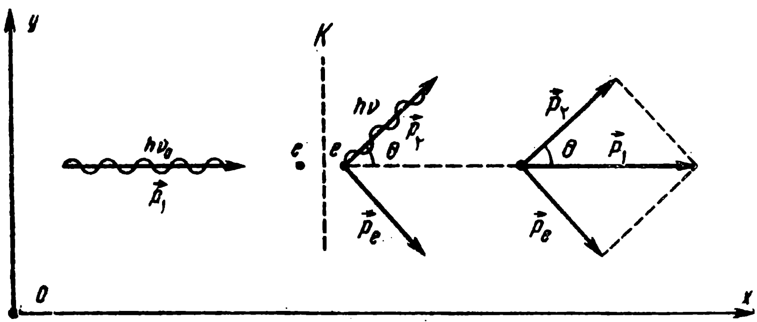
این نتیجه، ازدیدگاه نظام نسبیت روشن است: ازآنجا که بارساکن در چارچوب مرجع لخت خود، تابشی ندارد، نباید در هر چارچوب مرجع لخت دیگری هم دارای تابش باشد (اگرچه در چارچوب اخیر، با سرعت ثابتی حرکت می‌کند).

از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{c}{nv}\leqslant 1 \;\Rightarrow\; v\geqslant\frac{c}{n}=c' \qquad (۵)$$

برای به وجود آمدن تابش باید سرعت بار، بیشتر از سرعت نور در محیط مفروض باشد.

۲۱۰۶. فوتون باانرژی $h\nu$ و اندازهٔ‌حرکت $p_1=\frac{h\nu_0}{c}$ روی الکترون ساکن (در چارچوب مرجع آزمایشگاه) به جرم m می‌لغزد. فوتون، بعد از برهم‌کنش، با زاویهٔ θ پراکنده می‌شود، همراه با انرژی $h\nu$ و اندازهٔ‌حرکت $p_2=\frac{h\nu}{c}$؛ و الکترون به‌سرعت v می‌رسد (شکل ۹۰). با نوشتن قانون‌های بقای انرژی و اندازهٔ حرکت برای سیستم «فوتون ـ الکترون» به‌دست‌می‌آید:



شکل ۹۰

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \gamma mc^2 \qquad (1)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e \qquad (2)$$

که درآن‌ها $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ و $\vec{p}_e$ اندازهٔ حرکت الکترون است.

رابطهٔ (۲) را به‌صورت $\vec{p}_e = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ می‌نویسیم و آن‌را مجذور می‌کنیم:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

یا

$$\gamma^2 m^2 v^2 = \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{2h^2\nu_0\nu}{c^2}\cos\theta \qquad (3)$$

از (۱) و (۳)، بعد از انجام عمل‌های جبری ساده، رابطهٔ مربوط به‌اثر کامپتون به‌دست می‌آید:

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \dfrac{h\nu_0}{mc^2}(1-\cos\theta)} \qquad (4)$$

که انرژی فوتون پراکنده شده (یا بسامدآن ν) را برحسب زاویهٔ پراکندگی θ و انرژی فوتون اولیه (یا بسامدآن، ν_0)، به‌دست می‌دهد.

۲۲.۶ . طبق قانون‌های بقای اندازهٔ حرکت و انرژی، برای سیستم «هسته ـ کوانتوم γ» داریم:

$$p=\frac{h\nu}{c}\ ,\ mc^2=c\sqrt{p^2+\left(m-\frac{\Delta\varepsilon}{c^2}\right)^2c^2}+h\nu \qquad (1)$$

که در آن‌ها، p اندازهٔ حرکت هسته، ν بسامد کوانتوم γ و

$$E=c\sqrt{p^2+\left(m-\frac{\Delta\varepsilon}{c^2}\right)^2c^2}$$

انرژی هسته بعد از گسیل کوانتوم γ است (مسألهٔ ۱۴.۴ را ببینید).

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$\nu=\frac{\Delta\varepsilon}{h}-\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{2hmc^2} \qquad (2)$$

اگر هسته آزاد نباشد و به‌شبکهٔ تبلور محکم شده باشد، آن‌وقت، اندازهٔ حرکت ناشی از گسیل کوانتوم γ به‌تمامی جرم شبکه می‌رسد و ، بنابراین، برای خود هسته در (۱) باید بگیریم: $p=0$. در نتیجه، بسامد کوانتوم γ چنین می‌شود:

$$\nu_0=\frac{\Delta\varepsilon}{h} \qquad (3)$$

اختلاف عبارت‌های (۲) و (۳) ($\nu<\nu_0$)، به‌خاطر به‌حساب آوردن اندازهٔ‌حرکت ناشی از هسته‌ضمن گسیل کوانتوم γ است، که بر تعادل انرژی (چون انرژی به‌اندازهٔ‌حرکت بستگی دارد) و، بنابراین، بر بسامد گسیل اثر می‌گذارد. حالت (۳) ، در فیزیک اثر مس بویر نامیده می‌شود و عبارت است از گسیل بدون بازدهٔ کوانتوم γ به‌وسیلهٔ هسته.

۲۳.۶. بنابرقانون بقای انرژی بـاید داشته‌باشیم : $E_{12}=E_{34}$. انرژی هسته‌هـایی که در واکنش هسته‌ای شرکت می‌کنند، برابر است بـا انرژی هسته‌های حاصل ازواکنش. درحالت مفروض داریم:

$$E_{12}=(E_{k_1}+m_1c^2)+m_2c^2;\ \ E_{34}=(E_{k_3}+m_3c^2)+ +(E_{k_4}+m_4c^2)$$

بنابراین

$$E_{k_1}+(m_1+m_2)c^2=E_{k_3}+E_{k_4}+(m_3+m_4)c^2$$

از اینجا، اختلاف انرژی جنبشی هسته‌های حاصل وهسته‌های اولیه، عبارت است از

$$E_{k_{34}}-E_{k_{12}}=(E_{k_3}+E_{k_4})-E_{k_1}=(m_1+m_2)c^2-\\-(m_3+m_4)c^2 \qquad (1)$$

مقدار $E_{k_{34}}-E_{k_{12}}$ را آزادشدن انـرژی جنبشی واکنش هسته‌ای می‌نامند. اگر این انرژی را باحرف Q نشان دهیم، از(۱) به‌دست می‌آید:

$$Q=(m_1+m_2)c^2-(m_3+m_4)c^2 \qquad (2)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که: Q عبارت است از اختلاف انرژی کل هسته‌های ساکن، قبل و بعد از واکنش.

۶.۲۴. بـرای کل جرم هسته‌هـا ، به‌ترتیب قبل و بعد از واکنش، داریم:

$$M_1=1/49863\times 10^{-26}\ (\text{کیلوگرم});$$
$$M_2=1/49595\times 10^{-26}\ (\text{کیلوگرم})$$

در این‌صورت خواهیم داشت:

$$Q=(M_1-M_2)c^2=15/1\ (\text{ملیون الکترون‌ولت})$$

۶.۲۵. در این‌حالت داریم:

$$M_1=2/98812\times 10^{-26}\ (\text{کیلوگرم});$$
$$M_2=2/98833\times 10^{-26}\ (\text{کیلوگرم})$$

$$Q=(M_1-M_2)c^2=-1/2\ (\text{ملیون الکترون ولت})$$

۶.۲۶. بـا استفاده از قانون‌هـای بقای انرژی و اندازهٔ حرکت و رابطهٔ (۱) از ۴.۱۴ ، به‌دست می‌آید:

$$E_p=\frac{[m_2^2-m_p^2-(m_1-m_n)^2]c^2}{2(m_1-m_n)}$$

که درآن m_1 و m_2 ، جرم هسته‌های ^7_3Li و ^9_4Be هستند. بنابراین

$$E_k=E_p-m_pc^2=2/8\ (\text{ملیون الکترون ولت})$$

۲۷.۶. ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ هستهٔ اتم (نوکلئون‌ها) بـا نیروی‌خاص برهم‌کنشی ـ نیروهای هسته‌ای ـ به‌یکدیگر مقیدند و برای این‌که این ذره‌ها را واپاشیم و با فـاصله‌ای بیشتر از 10^{-13} سانتی‌متر (شعاع تبـادل آثار هسته‌ای) از هم جدا کنیم، باید از خارج ، روی‌آن،کار انجام دهیم. این‌کار برابراست باانرژی بستگی ذره‌های هسته ($E_{ب}$) که نوکلئون‌ها ضمن واپاشی جذب می‌کنند وضمن تشکیل هسته ازذره‌های‌آزاد، دفع می‌شود. به‌این‌ترتیب

$$E_{ب}=E_{ه}-\sum_{i}\varepsilon_{i} \qquad (۱)$$

که درآن، $\sum_{i}\varepsilon_{i}$ مجموع انرژی نوکلئون‌های‌آزاد و $E_{ه}$ انرژی هسته‌است.

بنابرقانون نسبیتی بستگی متقابل جرم و انرژی، داریم:

$$\frac{E_{ب}}{c^{2}}=\Delta m,\ \ \Delta m=m_{ه}-\sum_{i}m_{i} \qquad (۲)$$

که درآن، $m_{ه}$ جرم هسته و $\sum_{i}m_{i}$ مجموع جرم نوکلئون‌ها در هسته است.

Δm را، کاهش جرم هسته می‌نامند. رابطهٔ (۲) معرف یك‌پدیدهٔ جالب‌نسبیتی است: جرم‌کل برابر با مجموع جرم‌های جزءهای تشکیل‌دهندهٔ‌آن نیست.

کاهش جرم هسته را، معمولاً، به‌این‌صورت نشان می‌دهند:

$$\Delta m=m_{ه}-[Zm_{p}+(A-Z)m_{n}] \qquad (۳)$$

که درآن، m_{p} و m_{n} به‌ترتیب، جرم پروتون و نوترون؛ A عدد جرمی و Z بار هسته است. ازآن‌جاکه انرژی بستگی الکترون‌ها در اتم ، خیلی‌کمتر از انـرژی بستگی هسته است، در رابطهٔ (۳) می‌توان به جای $m_{ه}$ ، جرم اتم (m_{a}) و به جای m_{p}، جرم اتم هیدروژن را قرارداد؛ یعنی می‌توان در (۳) قرار داد:

$$m_{ه}=m_{a}-Zm_{i}$$

در این‌صورت

$$\Delta m=m_{a}-[Zm_{{}^{1}_{1}H}+(A-Z)m_{n}] \qquad (۴)$$

برای هستهٔ اتم‌های هلیوم ${}^{4}_{2}He$ و آلومی‌نیوم ${}^{27}_{13}Al$، بنابررابطه‌های (۴) و (۲) داریم:

$$۱)\ {}^{۴}_{۲}He(Z=۲,\ A=۴);\ \Delta m=-۵/۰۴\times ۱۰^{-۲۹}\ \text{(کیلوگرم)}$$

$$E_{\text{ب}}=c^{۲}\Delta m=-۲۸/۳\ \text{(ملیون الکترون ولت)}$$

$$۲)\ {}^{۲۷}_{۱۳}Al(Z=۱۳,\ A=۲۷);\ \Delta m=-۴\times ۱۰^{-۲۸}\ \text{(کیلوگرم)}$$

$$E_{\text{ب}}=c^{۲}\Delta m=-۲۲۵\ \text{(ملیون الکترون ولت)}$$

۲۸.۶. با توجه به‌اثر نسبیتی داریم:

$$\tau=\frac{\tau_{\circ}}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}$$

که به‌ازای $\frac{\tau_{\circ}}{\tau}=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$v=\frac{\sqrt{۳}}{۲}c=۲۶۰۰۰۰\ \text{(کیلومتر برساعت)}$$

انرژی جنبشی سفینه چنین است:

$$E_k=m_{۱}c^{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}-۱\right)=m_{۱}c^{۲}=۹\times ۱۰^{۲۰}\ \text{(ژول)}$$

با توجه به‌این که برای ^{۲۳۸}U داریم:

$$M=۰/۲۳۸\,\text{kg}/\text{mol}\ ,\ \ N_{\circ}=۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}\ ۱/\text{mol}$$

به‌دست می‌آید:

$$N=\frac{E_k}{\varepsilon}\ ,\ \ m_{۲}=\frac{MN}{N_{\circ}}$$

که در آن $\varepsilon=۱۷۰$ (ملیون الکترون ولت). به‌این‌ترتیب

$$m_{۲}=\frac{ME_k}{\varepsilon N_{\circ}}=۱/۳\times ۱۰^{۷}\ \text{(کیلوگرم)}$$

نتیجهٔ $m_{۲}\gg m_{۱}$ نشان می‌دهد که: برای تحقق سفینه‌هایی که بتوانند با سرعت‌هـای نزدیك به‌سرعت نور حرکت‌کنند، چه‌حجمی از سوخت لازم است وکار را تا چه حد دشوار می‌کند.

۲۹.۶. تا قبل از برخورد، انرژی ذره‌ها برابر است با

$$Mc^2+\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$$

(مسألهٔ ۱۴.۴ را ببینید) ، کـه در آن، M عبـارت است از جرم ذرهٔ B.

ذرهٔ B، بعد ازجذب ذرهٔ A، اندازهٔ حرکتی برابر $\vec{p}$ پیدامی‌کند(بنابرقانون بقای اندازهٔ حرکت) ؛ و چون $M=\text{inv}$ (برای ذره‌هـای بنیادی ، مقدار جرم، درهمهٔ فرایندهاناوردا است)، بنابراین،انرژی‌برابر $\sqrt{M^2c^4+p^2c^2}$ می‌شود.

بنابرقانون بقای انرژی داریم:

$$Mc^2+\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}=\sqrt{p^2c^2+M^2c^4}$$

و از آن‌جا به دست می‌آید:

$$2Mc^2\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}+m^2c^4=0$$

که درست نیست، زیـرا سمت چپ برابری همیشه مثبت است. بنابرایـن ، بدون به وجود آمدن ذره‌های بنیادی دیگر، جذب یك ذره بنیادی به وسیلهٔ دیگری، ممکن نیست. درحالت خاص، الکترون‌آزاد نمی‌تواند فـوتون را جذب کند.

۳۰.۶. ناوردای $E^2-p^2c^2$ را قبل ازبرهم‌کنش فوتون با ذرهٔ m_1 درچارچوب مرجع آزمایشگاه وبعد از برهم‌کنش در چارچوب مرکزی (به شرط این که در این چارچوب، ذره‌های اخیر در آستانـهٔ واکنش باشند) می‌نویسیم:

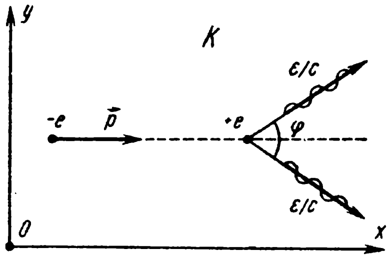
$$(\varepsilon+m_1c^2)^2-p^2c^2=(m_1+2m_e)^2c^4 \qquad (1)$$

که درآن $p=\frac{\varepsilon}{c}$.

از رابطهٔ (۱)دیده می‌شودکه، به‌ازای $m_1=0$ ، برابری (۱)ناممکن است.

انرژی مجهول فوتون چنین‌است:

$$\varepsilon=2m_e\left(1+\frac{m_e}{m_1}\right)c^2 \qquad (2)$$



شکل ۹۱

۶.۴۱. قانون‌های بقای انرژی و اندازهٔ حرکت را می‌نویسیم (وقانون اخیر را به‌صورت تصویر برمحور x) (شکل ۹۱):

$$p=۲\frac{\varepsilon}{c}\cos\frac{\varphi}{۲} \qquad (۱)$$

$$E_k+۲mc^۲=۲\varepsilon \qquad (۲)$$

که در آن ، p اندازهٔ حرکت پوزیترون ، m جرم آن ، ε انـرژی فوتون و $\frac{\varepsilon}{c}$ اندازهٔ حرکت فوتون است.

برای پوزیترون [رابطهٔ (۱) در ۴.۱۴ را ببینید]:

$$(E_k+mc^۲)^۲=p^۲c^۲+m^۲c^۴ \qquad (۳)$$

از (۱) تا (۳) به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\varphi}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۲mc^۲}{E_k}}} \qquad (۴)$$

چون $\frac{۲mc^۲}{E_k}=۰/۶۸۵$ ، بنابراین $\cos\varphi=۰/۷۶۹$ و $\varphi=۷۸^\circ$.

نتیجه‌گیری‌های کوتاه

۱. اثر دوپلر: الف) اثرطولی

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

علامت‌های بالایی (+ درصورت و − درمخرج) مربوط به‌حالت نزدیك شدن چشمه وگیرنده به‌یکدیگر (انتقال به بنفش $\nu > \nu_0$) وعلامت‌های پایینی (− درصورت و + درمخرج) مربوط به‌دورشدن آن‌ها ازیکدیگر(انتقال به‌قرمز $\nu < \nu_0$) است. ν_0 بسامد ویژهٔ چشمه و ν بسامدی است که‌در گیرنده تثبیت می‌شود.

ب) اثر عرضی

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

دستورکلی اثر دوپلر چنین است:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta}$$

کـه درآن ، θ عبارت است از زاویـهٔ بین بردار سرعت چشمه و راستای حرکت گیرنده.

۲. قانون تبدیل زاویهٔ بین بردار $\vec{v}$ (سرعت‌نسبی‌چارچوب‌های‌مرجع لخت KوK') وجهت مفروض:

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos\theta}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta \cos\theta}$$

این رابطه‌ها، معرف پدیدهٔ ابیراهی‌اند: تغییر جهت درشیء ضمن‌عبور ازیك چارچوب مرجع لخت به‌چارچوب دیگر.

۳. تغییر بسامد نور، ضمن بازتاب ازآئینهٔ متحرك:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}$$

که درآن ، $\nu_\circ$ و ν، به‌ترتیب بسامدهای نور تابیده به‌آئینه وبازتابیده از آن است. علامت‌های بالایی به‌حالت نزدیك‌شدن آئینه، و علامت‌های پایینی به حالت دورشدن آن مربوط می‌شود.

۴. شرط تابش واویلوف ـ چرنکوف

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}$$

نشان می‌دهد که، برای تابش باری که درمحیط حرکت می‌کند، باید سرعت آن بیشتر از سرعت نور درمحیط مفروض باشد! باری که به‌طور یکنواخت درخلاء حرکت می‌کند، نمی‌تواند تابشی داشته باشد.

۵. رابطهٔ اثر کامپتون

$$h\nu = \frac{h\nu_\circ}{۱ + \frac{h\nu_\circ}{mc^۲}(۱-\cos\theta)}$$

معرف انرژی است که فوتون به الکترون می‌دهد $(h\nu)$؛ θ زاویهٔ پراکندگی $h\nu_\circ$ انرژی فوتون اولیه و m جرم الکترون است.

۶. گسیل انرژی درواکنش هسته‌ای.

$$Q = (m_۱ + m_۲)c^۲ - (m_۳ + m_۴)c^۲$$

که درآن، $m_۱ + m_۲$ مجموع جرم‌های هسته‌های اولیه و $m_۳ + m_۴$ مجموع جرم‌های هسته‌های حاصل است.

انرژی بستگی هسته: $E_{\text{ب}} = E_{\text{ه}} - \sum_i \varepsilon_i$، که در آن، $\sum_i \varepsilon_i$ مجموع انرژی‌های نوکلئون‌های آزاد و $E_{\text{ه}}$ انرژی هسته (یعنی انرژی نگه‌دارندهٔ نوکلئون‌ها درهسته) است.

کاهش جرم هسته

$$\Delta m = \frac{E_{\text{ب}}}{c^۲} \; ; \; \Delta m = m_{\text{ه}} - \sum_i m_i$$

که در آن، $m_{\text{ه}}$ جرم هسته و $\sum_i m_i$ مجموع جرم نوکلئون‌های هسته؛

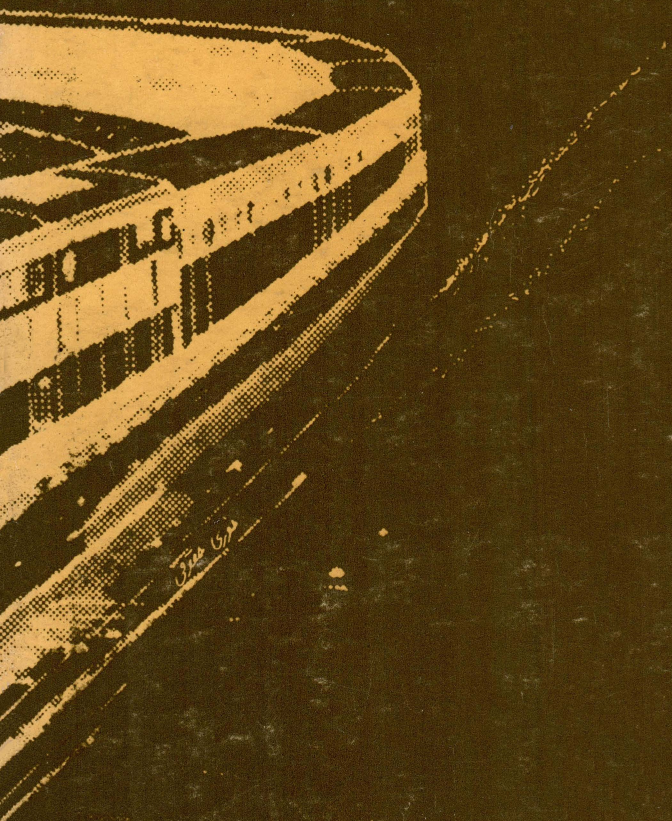
$$\Delta m = m_{\text{ه}} - [Zm_p + (A-Z)m_n]$$

دراین‌جا، m_p و m_n به‌ترتیب عبارتند از جرم پروتون و نوترون.

این رابطه را، به‌صورت دیگری هم می‌توان نوشت:

$$\Delta m = m_a - Zm_{^1H} + (A-Z)m_n]$$

۶۰۰ ریال



نشر نی